KONSEP LIMIT FUNGSI

Nurwahyuni
uniponya@yahoo.co.id
Guru SMK Pancamarga Makassar

PENDAHULUAN

Limit merupakan salah satu pokok bahasan dalam mata kuliah kalkulus yang memegang peranan penting sebagai prasyarat untuk beberapa pokok bahasan lainnya. Konsep limit fungsi merupakan konsep dasar untuk membangun beberapa konsep kalkulus lainnya, misalnya konsep turunan dan integral. Sehingga penguasaan limit mendukung tingkat penguasaan pada kalkulus. Secara intuitif konsep limit sukar untuk dipahami, tetapi pada kenyataannya konsep limit sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh kita tidak dapat menentukan besar perubahan volume air yang tertuang ke dalam gelas tepat pada waktu tertentu. Namun, dengan penerapan konsep limit, kita dapat menentukannya melalui nilai pendekatannya.

Pernyataan-pernyataan di atas menunjukkan bahwa konsep limit merupakan konsep yang sangat esensial di dalam menguasai kalkulus. Konsep-konsep seperti kekontinuan, diferensial, dan integral semuanya dilandasi dengan konsep limit. Tetapi ironisnya konsep yang seharusnya dikuasai justru dihindari oleh banyak mahasiswa dan menganggap bahwa konsep ini termasuk konsep yang sulit dipelajari. Pembelajaran konsep limit fungsi diawali dengan menyajikan pengertian konsep tersebut secara intuitif sebelum definisi formal limit fungsi diberikan. Pemahaman terhadap definisi limit sangat penting karena hal ini menjadi landasan untuk memahami teorema-teorema limit selanjutnya. Untuk memahami definisi limit fungsi maka ada beberapa materi prasyarat yang perlu dikuasai. Antara lain konsep fungsi, konsep nilai mutlak dan logika (implikasi dan kalimat berkuantor).

Berdasarkan latar belakang tersebut maka penulis mengangkat masalah mengenai definisi limit fungsi.

PEMBAHASAN

Fungsi

Fungsi, dalam istilah matematika adalah pemetaan setiap anggota sebuah himpunan (dinamakan sebagai domain) kepada anggota himpunan yang lain (dinamakan sebagai kodomain). Istilah ini berbeda pengertiannya dengan kata yang sama yang dipakai sehari-hari, seperti "alatnya ber*fungsi* dengan baik." Konsep fungsi adalah salah satu konsep dasar dari matematika dan setiap ilmu kuantitatif. Istilah "*fungsi*", "*pemetaan*", "*peta*", "*transformasi*", dan "*operator*" biasanya dipakai secara sinonim. Pengertian "fungsi" pertama kali digunakan oleh Leibniz tahun 1673 untuk menyatakan ketergantungan suatu besaran pada besaran lainnya. Contoh:

Luas lingkaran bergantung pada jari-jari r dengan persamaan $A = \pi r^2$, sehingga dikatakan "A fungsi dari r"
Kecepatan v dari benda yang jatuh bebas pada medan gravitasi bumi bertambah seiring bertambahnya waktu t sampai bola menyentuh bumi, dikatakan "v fungsi dari t".

Secara umum, jika besaran y bergantung pada besaran x sedemikian sehingga setiap nilai x menentukan tepat satu nilai y, maka dikatakan bahwa "y adalah fungsi dari x". Contoh persamaan berikut

$$y = 4x + 1$$

mendefinisikan y sebagai fungsi dari x sebab nilai yang diberikan pada x menentukan tepat satu nilai y.

Untuk mendefinisikan suatu fungsi F dari dari himpunan A ke himpunan B diperlukan;

- Suatu himpunan A
- Suatu himpunan B
- Aturan yang memasangkan setiap elemen $x \in A$ dengan satu elemen tunggal $y \in B$.

Definisi (fungsi sebagai pemetaan)

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal, dengan elemen pada B

Untuk menyatakan fungsi tanpa menuliskan rumus yang spesifik, matematikawan Swiss, Leonhard Euler memberikan gagasan penulisan fungsi dengan huruf alfabet. Sebagai contoh, jika kita menggunakan huruf f untuk menyatakan fungsi, maka persamaan $y = f(x)$ menyatakan bahwa y adalah fungsi dari x. Besaran x disebut *peubah bebas* dari f dan y disebut *peubah tidak bebas* dari f.

Peubah bebas harus dibatasi pada suatu himpunan yang dsebut *domain* dari fungsi. Jika fungsi f dan $y = f(x)$ maka domain f dapat dipandang sebagai himpunan nilai-nilai yang diperkenankan untuk peubah bebas x. Domain (daerah asal) dari suatu fungsi adalah himpunan bilangan dimana fungsi tersebut dapat diterapkan artinya himpunan bilangan yang dipasangkan dengan variabel independen tersebut. Range dari suatu fungsi adalah himpunan bilangan di mana fungsi tersebut berasosiasi dengan bilangan-bilangan pada domain.

Jika untuk sebuah fungsi daerah asalnya tidak disebutkan secara eksplisit, dianggap bahwa daerah asalnya adalah himpunan bilangan riil yang terbesar sehingga aturan fungsi ada maknanya dan memberikan nilai bilangan riil. Daerah asal ini disebut ***daerah asal alamiah***. Contoh:

$f(x) = x^2$

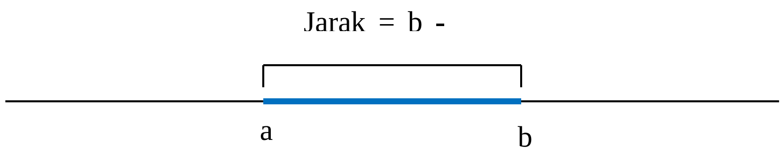
Mempunyai arti dan mempunyai nilai real untuk semua bilangan real x. Jadi domain alami atau daerah asal alami f adalah $(-\infty, +\infty)$.

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

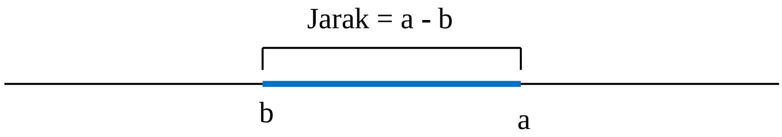
Mempunyai nilai real dimana-mana kecuali di $x = 2$ yang menyebabkan pembagian dengan nol. Jadi domain h terdiri dari semua bilangan real x kecuali $x = 2$.

Nilai Mutlak

Perhatikan gambar berikut



jarak titik a ke titik b adalah $b - a$ bila $a < b$



jarak titik a ke titik b adalah $a - b$ bila $a > b$
Dari gambar di atas dapat disimpulkan sebagai berikut

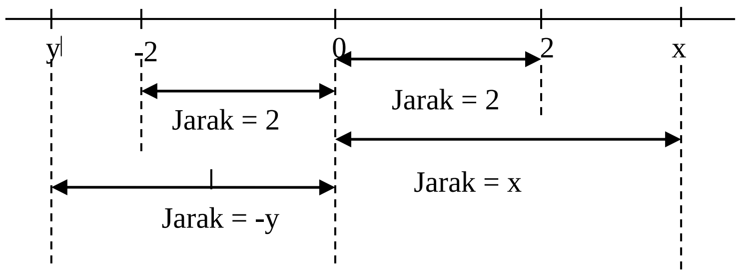
Jarak titik a ke titik b pada garis bilangan adalah

$$j(a,b) = \begin{cases} b - a, \ bila \ a < b \\ 0 \qquad bila \, a = b \\ a - b, \ bila \, a > b \end{cases}$$

Jika $b = 0$ maka jarak titik a ke 0 adalah

$$j(a,0) = \begin{cases} -a, \ bila \ a < 0 \\ 0 \qquad bila \, a = 0 \\ a, \ bila \, a > 0 \end{cases}$$

Konsep nilai mutlak dari bilangan real x dirancang sehingga mempunyai arti sebagai jarak dari x ke 0 pada garis bilangan. Akibatnya, nilai mutlak dapat digunakan sebagai ukuran jarak dari dua bilangan (titik) pada garis bilangan real.



Dari gambar di atas dapat disimpulkan

- Jarak dari 2 ke 0 adalah 2 – 0 = 2, jarak dari -2 ke 0 adalah 0 – (-2) = 2
- Bila $x > 0$, jarak dari x ke 0 adalah $x - 0 = x$, bila $y < 0$, jarak y ke 0 adalah $0 - y = -y$. Perhatikan bahwa disini $-y$ adalah bilangan positif karena $y < 0$. Bila $z = 0$, maka jarak z ke 0 adalah 0.
- Dari hal tersebut, jarak dari x ke 0 adalah x jika $x \geq 0$, dan jarak dari x ke 0 adalah –x bila x < 0. Hasil dapat ditulis dalam bentuk

$$Jarak \ x \ ke \ 0 = \begin{cases} x, bila \ x \geq 0 \\ -x, bila \, x < 0 \end{cases}$$

Definisi Nilai Mutlak

Nilai mutlak dari bilangan real x ditulis |x|, didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x, bila \ x \geq 0 \\ -x, bila \, x < 0 \end{cases}$$

Beberapa sifat nilai mutlak antara lain sebagai berikut:

- Untuk setiap bilangan real x berlaku
- Jika $a \geq 0$, maka
  a. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
  b. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \ atau \ x \leq -a$
  c. $|x - c| \leq a \Leftrightarrow c - a \leq x \leq c + a$
  d. $|x - c| \geq a \Leftrightarrow x - c \leq -a \ atau \ x - c \geq a$

- *Ketidaksamaan segitiga*. Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku

  a. $|x+y| \leq |x| + |y|$ c. $|x| - |y| \leq |x-y|$

  b. $|x-y| \leq |x| + |y|$ d. $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Salah satu bentuk pertidaksamaan nilai mutlak yang terdapat pada definisi limit formal adalah $0 < |x - c| < \delta$ dengan c sebarang bilangan real dan δ (delta) adalah biangan real positif. Himpunan penyelesaiannya terdiri dari semua nilai real x yang memenuhi pertidaksamaan

$$0 < |x - c| \text{ dan } |x - c| < \delta$$

Dengan menggunakan sifat nilai mutlak maka diperoleh himpunan penyelesaian dari $0 < |x - c| < \delta$ adalah selang $(c - \delta, c + \delta)$ kecuali c atau dituliskan $(c - \delta, c) \cup (c + \delta)$.

Logika

- **Implikasi**

Proposisi majemuk *implikasi* disusun dari dua buah proposisi atomik dengan menggunakan kata perangkai "jika ....., maka .....". Implikasi dua buah proposisi p dan q, yaitu "jika p maka q" disajikan dengan lambang $p \Rightarrow q$, di-mana p disebut *anteseden* (atau *premis*) dan q disebut *konsekuen* (atau *kes-impulan*). Suatu implikasi bernilai salah hanya bila antesedennya bernilai benar dan konsekuennya bernilai salah, sedangkan untuk kejadian lainnya implikasi bernilai benar. Dengan kata lain, suatu implikasi bernilai benar bila antesedennya bernilai salah atau konsekuennya bernilai benar.

- **Kalimat Berkuantor**

  Kuantor Universal (Universal Quantifier).

Kuantor universal menunjukkan bahwa setiap objek dalam semestanya mempunyai sifat kalimat yang menyatakannya. Kita dapat meletakkan kata-kata "Untuk semua/setiap x" di depan kalimat terbuka yang mengandung variabel x untuk menghasilkan kalimat yang mempunyai suatu nilai kebenaran. Nilai x diten-tukan berdasarkan semesta pembicaraannya. Kuantor universal disimbolkan dengan "∀". Kuantor universal mengindikasikan bahwa sesuatu bernilai benar un-tuk semua individual-individualnya. Perhatikan kalimat berikut ini :

"Semua gajah mempunyai belalai"

Maka jika predikat "mempunyai belalai" diganti dengan simbol B maka dapat di-tulis : G(x) ⇒ B(x), dapat dibaca "Jika x adalah gajah, maka x mempunyai belalai". Tetapi kalimat di atas belum berupa kalimat berkuantor karena kalimat diatas belum memuat kata "semua". Untuk itu perlu ditambahkan simbol kuantor universal sehingga menjadi (∀x)(G(x) ⇒ B(x)), jadi sekarang dapat dibaca " Un-tuk semua x, jika x adalah gajah, maka x mempunyai belalai".

Pernyataan-pernyataan yang berisi kata "semua", "setiap", atau kata lain yang sama artinya, mengindikasikan adanya pengkuantifikasian secara universal, maka dipakai kuantor universal. Misalnya jika diketahui pernyataan logika, "Se-tiap mahasiswa harus belajar dari buku teks", jika ingin ditulis dalam logika pred-ikat, maka ditentukan misal B untuk " harus belajar dari buku teks", sehingga jika ditulis B(x), berarti "x harus belajar dari buku teks". Kata "Setiap mahasiswa" mengindikasikan bernilai benar untuk setiap x.

Kuantor Eksistensial (Existensial Quantifier)

Kuantor eksistensial menunjukkan bahwa diantara objek-objek dalam se-mestanya, paling sedikit ada satu objek yang memenuhi sifat kalimat yang menyatakannya. Kita dapat meletakkan kata-kata: "Terdapat…..", "Beberapa x bersifat …...", "Ada……", "Paling sedikit ada satu x……" di depan kalimat terbuka yang mengandung variabel x. Kuantor eksistensial disimbolkan dengan "$\exists$". Kuantor eksistensial mengindikasikan bahwa sesuatu kadang-kadang bernilai benar untuk individu-individualnya. Perhatikan kalimat berikut ini :

Misalkan B adalah himpunan bilangan bulat. Tentukan nilai kebenaran $(\exists x \in B)(x^2=x)$.

$(\exists x \in B)(x^2=x)$ dapat dibaca "Terdapat x yang adalah bilangan bulat dan x memenuhi $x^2=x$". $(\exists x \in B)(x^2=x)$ akan bernilai benar jika dapat ditunjukkan paling sedikit ada satu bilangan bulat yang memenuhi $x^2=x$. Karena ada satu nilai yang memenuhi, yaitu $x = 1$, maka pernyataan di atas bernilai benar.

Kuantor Ganda

Persoalan selanjutnya adalah bagaimana jika memakai dua kuantor yang berbeda pada satu penulisan simbol yang berasal dari satu pernyataan. Apakah domain penafsiran juga akan berbeda atau sama? Perhatikan contoh berikut ini : $(\forall x \in R)(\forall y \in R)S(x,y)$, misalkan $S(x,y) = x + y = y + x$ dan dapat dibaca " Untuk semua bilangan real x dan semua bilangan real y, adalah benar $x + y = y + x$"

Secara umum, hubungan antara penempatan kuantor ganda adalah sebagai berikut:

$(\forall x)(\forall y)\ P(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x)\ P(x,y)$
$(\exists x)(\exists y)\ P(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)\ P(x,y)$
$(\exists x)(\forall y)\ P(x,y) \neq (\forall y)(\exists x)\ P(x,y)$

Limit Secara Intuisi

Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi pada interval terbuka yang memuat c, kecuali c itu sendiri. Kita akan mengamati perilaku fungsi f di sekitar titik c. Apakah yang akan terjadi dengan nilai-nilai fungsi f jika x dibuat sedekat mungkin ke c? Untuk menjawab pertanyaan tersebut maka akan diselidiki nilai-nilai $f(x)$ di sekitar $x = c$.

Suatu fungsi variabel x, $f(x)$ dikatakan mendekati suatu nilai limit L untuk x mendekati c. Secara intuisi pengertian $\lim_{x\to c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari c maka $f(x)$ dekat ke L. Harus diperhatikan bahwa tidak mensyaratkan sesuatu agar tepat benar di c. Fungsi f bahkan tidak perlu terdefinisi di c. Pemikiran tentang limit dihubungkan dengan perilaku suatu fungsi di dekat c. Yang menjadi permasalahan adalah kata "dekat" itu sendiri. Apa sebenarnya makna kata "dekat" itu. Untuk memahami situasi di atas dan sebelum mendefinisikan limit secara lengkap berikut beberapa contoh.

Perhatikan fungsi f yang didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x-2},\ x \neq 2$$

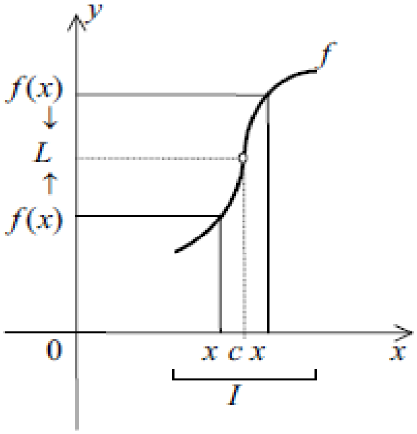
Fungsi tersebut tidak terdefinisi di $x = 2$, tetapi masih dapat dilihat perilaku nilai f untuk x yang sangat dekat ke 2, baik dari arah kanan ($x > 2$), maupun dari arah kiri ($x < 2$), sehingga fungsi f terdefinisi untuk setiap bilangan real x kecuali di $x = 2$. Nilai-nilai $f(x)$ jika x dibuat sedekat mungkin ke 2, dapat dilihat pada tabel berikut

x	$f(x)$
0,00000	1,00000
1,00000	3,00000
1,90000	4,80000
1,95000	4,90000
1,99999	4,99998
2,00000	?
2,00001	5,00002
2,05000	5,10000

Tabel di atas menunjukkan bahwa nilai *f(x)* dapat dibuat sedekat mungkin ke 5 dengan cara mengambil *x* yang cukup dekat ke 2. Situasi dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\lim_{x \to c} f(x) = 5 \text{ atau } \lim_{x \to c} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$$

Misal kita mempunyai fungsi *y* = *f(x)* dan sebuah titik *c*. Agar peubah bebas *x* dapat bergerak menuju titik tetap *c*, kondisinya adalah di sekitar titik *c* harus terdapat tak hingga banyaknya titik dari daerah asal fungsi *f*. Dalam konteks ini, kondisi yang paling sederhana adalah daerah asal fungsi *f* berbentuk selang terbuka *I* yang memuat *c*, kecuali mungkin di *c* sendiri. Gambar berikut memperlihatkan fungsi *f* yang terdefinisi pada *I* – {*c*} dimana *I* adalah selang terbuka yang memuat titik *c*.



Perhatikan bahwa jika *x* dekat dengan *c*, dan $x \neq c$, maka *f(x)* dekat dengan *L*. Hal tersebut dapat ditulis

"jika x mendekati c, maka f(x) mendekati L"

Untuk memberi istilah *"mendekati"*, kita perlu ukuran jarak dua titik pada garis. Ukuran jarak yang akan kita gunakan adalah nilai mutlak. Istilah mendekati titik tetap *c* berarti bahwa jarak antara titik sebarang *x* ke titik *c* semakin lama semakin kecil. Arti dari *"jika x mendekati c, maka f(x) mendekati L"* adalah jarak *f(x)* ke *L* dapat dibuat semakin dekat dengan cara mengambil *x* yang semakin dekat ke *c*. Berdasarkan situasi tersebut maka secara intuitif kita bangun konsep limit fungsi di satu titik yang dilambangkan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Menyatakan bawa limit fungsi *f* di *c* adalah *L* yang menggambarkan situasi pada gambar di atas. Informasi yang dapat kita peroleh dari sini adalah *f(x) dekat dengan L bila x dekat ke c, dan* $x \neq c$

Atau

f(x) mendekati L bila x mendekati c

Pernyataan ini dapat dilambangkan

$$f(x) \to L \text{ saat } x \to c$$

Dengan cara yang lebih seksama, kita dapat menyatakan bahwa

f(x) dapat dibuat sebarang dekat ke L dengan cara mengambil x yang cukup dekat ke c tetapi $x \neq c$

Jika untuk istilah dekat digunakan *ukuran jarak nilai mutlak,* maka kita ssampai pada kesimpulan

Jarak f(x) ke L dapat dibuat sebarang kecil dengan caramengambil jarak x ke c yang cukup kecil dan $x \neq c$

Atau

|f(x) – L| dapat dibuat sebarang kecil dengan cara mengambil |x – c| yang cukup kecil dan $x \neq c$

Secara matematis, bila ε (epsilon) dan δ (delta) menyatakan lambang untuk bilangan kecil, maka berarti bahwa

|f(x) – L| dapat dibuat lebih kecil dari sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ *dengan cara mengambil |x – c| yang lebih kecil dari suatu bilangan* $\delta > 0$ *dan* $x \neq c$

dengan perkataan lain

bila $\varepsilon > 0$ *diberikan, kita dapat menentukan suatu* $\delta > 0$ *sehingga untuk x yang memenuhi 0 < |x – c| <* δ*, berlaku |f(x) – L| <* ε

Jika dituliskan dengan lambang matematika dimana $\forall$ menyatakan *kuantor universal* (untuk sebarang/setiap/semua), $\exists$ menyatakan *kuantor eksistensial* (terdapat suatu), dan $\ni$ menyatakan kata sambung *sehingga*, maka pernyataan di atas dapat dituliskan

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definisi Tepat pada Limit

Misal *f* adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada beberapa interval terbuka yang memuat suatu titik *c* walaupun kita tidak menegaskan bahwa *f* didefinisikan pada titik *c* itu sendiri. Misalkan *L* adalah suatu bilangan real. Persamaan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Dibaca: "limit *f(x)*, saat *x* mendekati *c*, adalah sama dengan *L*", atau "*f(x)* mendekati *L* saat *x* mendekati *c*". Ini juga dapat dituliskan tanpa simbol limit, sebagai berikut:

$$f(x) \to L \text{ saat } x \to c$$

Simbol ini dimaksudkan untuk menyampaikan ide bahwa kita dapat membuat *f(x)* sangat dekat dengan *L* dengan memilih *x* yang cukup dekat dengan *c*. Pertama kita memperkenalkan konsep persekitaran dari sebuah titik, maka kita mendefinisikan limit dalam istilah persekitaran.

Notasi. Kita melambangkan persekitaran dengan $N(c), N_1(c), N_2(c)$. Karena persekitaran *N(c)* pada interval terbuka simetris di *c*, itu terdiri dari semua bilangan real *x* yang memenuhi $c - r < x < c + r$ untuk beberapa $r > 0$. Bilangan positif *r* disebut radius persekitaran. Pertidaksamaan $c - r < x < c + r$ ekuivalen dengan $-r < x - c < r$ dan $|x - c| < r$.

Definisi selanjutnya, kita mengasumsikan L adalah suatu bilangan real dan terdapat fungsi f yang terdefinisi pada beberapa persekitaran pada suatu titik c (kecuali mungkin pada c).

Definisi Limit suatu Fungsi

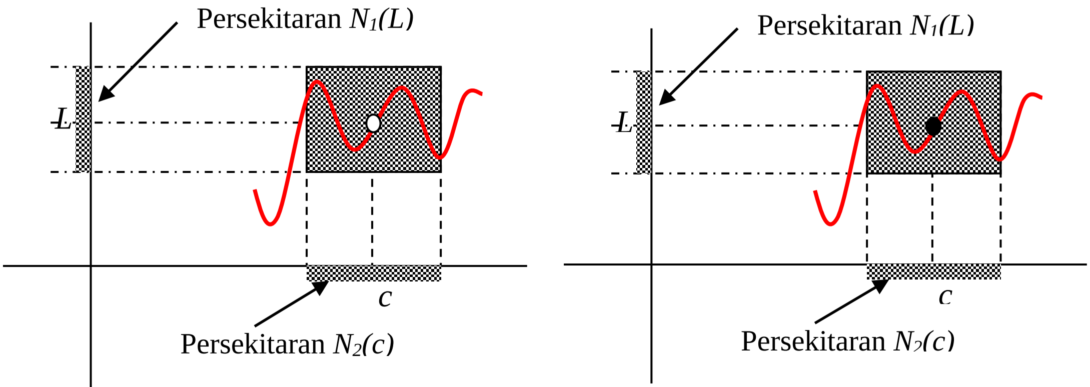
The symbolism

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \;\; (or \;\; f(x) \to L \;\; as \;\; x \to c)$$

Means that for every neigborhood $N_1(L)$ there is some neigborhood $N_2(c)$ such that $f(x) \in N_1(L)$ *whenever* $x \in N_2(c)$ *and* $x \neq c$

Hal pertama yang harus diperhatikan tentang definisi ini adalah bahwa hal itu melibatkan dua persekitaran, $N_1(L)$ dan $N_2(c)$. Persekitaran $N_1(L)$ pertama ditetapkan; itu mengemukakan kepada kita seberapa dekat kita menginginkan $f(x)$ ke L. Persekitaran yang kedua, $N_2(c)$ mengemukakan kepada kita seberapa dekat x ke c sehingga $f(x)$ berada dalam persekitaran yang pertama $N_1(L)$. Bagian yang paling esensial adalah untuk *setiap* $N_1(L)$, bagamanapun kecilnya, terdapat beberapa persekitaran $N_2(c)$. Secara umum, persekitaran $N_2(c)$ akan bergatung pada pemilahan di $N_1(L)$.

Definisi limit dapat diilustrasikan secara geometri seperti gambar berikut.



Suatu persekitaran $N_1(L)$ ditunjukkan pada sumbu-y. Suatu persekitaran $N_2(c)$ ditunjukkan pada sumbu-x. Segiempat yang diarsir memuat semua titik (x, y) dimana $x \in N_2(c)$ dan $y \in N_1(L)$. Definisi limit menegaskan bahwa bahwa seluruh grafik f di atas interval $N_2(c)$ terletak di dalam persegi panjang ini, kecuali mungkin untuk titik pada grafik di atas c itu sendiri.

Definisi limit dapat juga diformulasikan ke dalam bentuk jari-jari persekitaran $N_1(L)$ dan $N_2(c)$. Biasanya untuk radius pada $N_1(L)$ ditunjukkan dengan ε dan radius $N_2(c)$ ditunjukkan dengan δ. Pernyataan $f(x) \in N_1(L)$ ekuivalen dengan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \varepsilon$ dan pernyataan $x \in N_2(c)$ ekuivalen dengan pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$. Definisi limit dapat dituliskan sebagai berikut

Simbol $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *berarti bahwa untuk setiap* $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ *sehingga* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *jika* $0 < |x - c| < \delta$

Atau

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definisi formal limit fungsi dapat digunakan dalam proses membuktikan memvalidasi nilai suatu limit fungsi. Demikian halnya ketika kita akan membuktikan

$\lim_{x\to c} f(x) \neq L$ maka cukup membuat ingkaran (negasi) dari definisi formal limit fungsi. Sehingga kita harus menunjukaan bahwa

$$\exists\varepsilon > 0, \forall\delta > 0 \ni 0 < |x-c| < \delta \; dan \, |f(x)-L| > \varepsilon$$

Atau dengan kata lain kita harus menunjukkan bahwa ada paling sedikit satu ε dan tidak ada δ yang memenuhi yang dapat membuat pernyataan $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| > \varepsilon$ mejadi benar.

Contoh:

- Buktikan bahwa $\lim_{x\to c}(mx+b) = mc+b$

Penyelesaian:

Analisis Pendahuluan

Kita ingin mencari δ sedemikian sehinga

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |(mx+b)-(mc+b)| < \varepsilon$$

Sekarang

$$|(mx+b)-(mc+b)| = |(mx-mc| = |m(x-c)| = |m||x-c|$$

Terlihat bahwa $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|}$ akan memenuhi

Bukti Formal

Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|}$. Sehingga jika $0 < |x-c| < \delta$

Maka $|(mx+b)-(mc+b)| = |mx-mc| = |m||x-c| < |m|\delta = |m|\dfrac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon$

- Misalnya akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

Penyelesaian:

Analisis Pendahuluan

Jika x $\neq$ 2, maka:

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right| = \left|\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}-4\right| = |x+2-4| = |x-2|$$

Jelas dapat dilihat, untuk pemilihan $\delta = \varepsilon$ maka pertaksamaan dalam pembuktian berikut menjadi benar.

Bukti formal

Misal $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih $\delta = \varepsilon$, maka diperoleh:

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right| = |x-2| < \delta = \varepsilon, \text{ bila } 0 < |x-2| < \delta$$

Jadi $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

Kesimpulan

Definisi Limit fungsi adalah *Disimbolkan* $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *(atau* $f(x) \to L$ *saat* $x \to c$*) bearti bahwa untuk setiap persekitaran* $N_1(L)$ *terdapat beberapa persekitaran* $N_2(c)$ *sehingga* $f(x) \in N_1(L)$ *ketika* $x \in N_2(c)$ *dan* $x \neq c$

Atau

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

DAFTAR PUSTAKA

Apostol, Tom. 1966. Calculus Volume 1 Second Edition. California

Martono, Koko. 1999. Kalkulus. Jakarta: Erlangga.

Susilo, Frans. 2006. Himpunan & Logika Kabur. Yogyakarta: Graha Ilmu

Tim Penyusun Buku Ajar Kalkulus. 2004. Kalkulus 1. Surabaya: FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember.