

**ANALISIS PEMAHAMAN MAHASISWA TERHADAP KONSEP LIMIT
FUNGSI DI SATU TITIK
(STUDI KASUS PADA MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA FMIPA UNM)**

Erni Ekafitria Bahar

erni_bahar@yahoo.com

Mahasiswa Pasca Sarjana UNM Makassar

ABSTRAK

Konsep limit fungsi merupakan konsep dasar untuk membangun beberapa konsep kalkulus lainnya, misalnya turunan dan integral. Konsep limit fungsi di satu titik perlu dipahami oleh mahasiswa agar konsep yang didasarkan pada konsep limit juga dapat dipahami. Namun beberapa mahasiswa yang telah belajar konsep limit fungsi di satu titik belum memahami dengan benar konsep limit fungsi di satu titik. Tujuan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi di satu titik. Pemahaman yang dimaksud dalam penelitian ini adalah pemahaman instrumental (mampu menuliskan konsep limit fungsi di satu titik tetapi tidak mampu menjelaskan dengan tepat) dan pemahaman relasional (mampu menuliskan dan menjelaskan konsep limit fungsi di satu titik dengan tepat). Penelitian ini adalah penelitian kualitatif. Subjek penelitian adalah tiga orang mahasiswa Jurusan Matematika yaitu seorang berkemampuan tinggi yang selanjutnya disebut subjek tinggi (ST), berkemampuan sedang yang selanjutnya disebut subjek sedang (SS), dan berkemampuan rendah yang selanjutnya disebut subjek rendah (SR). Fokus penelitian adalah mendeskripsikan pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi di satu titik yang meliputi pemahaman instrumental dan pemahaman relasional. Untuk mengungkap data penelitian, dilakukan wawancara berbasis tugas kepada subjek penelitian. Data penelitian divalidasi dengan melakukan triangulasi waktu yaitu melakukan wawancara dalam waktu cukup lama dengan wawancara sebelumnya. Data penelitian dianalisis dengan (a) menelaah data subjek dan membandingkan data wawancara untuk memperoleh data yang valid, (b) melakukan reduksi data dengan membuat abstraksi, (c) mengklasifikasi dan mengidentifikasi data untuk menarik kesimpulan dari data. Hasil penelitian ini menunjukkan: (1) pemahaman subjek tinggi (ST): (a) pemahaman terhadap ε dan δ termasuk pemahaman relasional, (b) pemahaman terhadap kalimat berkuantor termasuk pemahaman instrumental, sedangkan pemahaman terhadap kalimat implikasi termasuk pemahaman relasional, (c) pemahaman terhadap nilai mutlak sebagai jarak termasuk pemahaman relasional, (d) pemahaman fungsi dan grafik fungsi termasuk pemahaman relasional, (e) pemahaman dalam mengimplementasikan definisi formal limit fungsi untuk membuktikan kebenaran nilai limit termasuk pemahaman relasional; (2) pemahaman subjek sedang (SS): (a) pemahaman terhadap ε dan δ termasuk pemahaman relasional, (b) pemahaman terhadap kalimat berkuantor dan kalimat implikasi termasuk pemahaman relasional, (c) pemahaman terhadap nilai mutlak sebagai jarak termasuk pemahaman relasional, (d) pemahaman fungsi dan grafik fungsi termasuk pemahaman instrumental, (e) pemahaman dalam mengimplementasikan definisi formal limit fungsi untuk membuktikan kebenaran nilai limit termasuk pemahaman instrumental; (3) pemahaman subjek rendah (SR): (a) pemahaman terhadap makna ε dan δ termasuk pemahaman instrumental, sedangkan pemahaman terhadap kaitan keduanya termasuk pemahaman relasional, (b) pemahaman terhadap kalimat berkuantor termasuk pemahaman instrumental, sedangkan pemahaman terhadap kalimat implikasi termasuk pemahaman relasional, (c) pemahaman terhadap nilai mutlak sebagai jarak termasuk pemahaman instrumental, (d) pemahaman fungsi dan grafik fungsi termasuk pemahaman relasional, (e) pemahaman dalam mengimplementasikan definisi formal limit fungsi untuk membuktikan kebenaran nilai limit termasuk pemahaman instrumental

ABSTRACT

The concept of limit is a basic concept to build several calculus concepts such as derivative and integral. The concept of one point limit function should be understood by the students so they can understand other concepts derived from the limit concept as well. However, several students who have learned the concept of one point limit function do not understand the concept yet. The objective of the study is to describe the students' understanding on the concept of one point limit function. The understanding, in the research, consists of instrumental understanding (able to write the concept of limit function in one point but could not explain it well) and relational understanding (able to write and explain the concept of limit function in one point it well) The study was a qualitative research. The subjects of the study were three students of Mathematics Department based on their ability considering the GPA that the person has high ability, namely high achiever (ST); moderate ability, namely moderate achiever (SS); and low ability, namely low achiever (SR). The focus of the study is to describe the students' understanding on the concept of limit function in one point which including instrumental understanding and relational understanding. In order to reveal the data of the study, task based interview was implemented to the research subjects. The data were validated by conducting time triangulation, which was interview with a long period of time from the previous interview. Data were analyzed by: (a) studying subjects' of the data and comparing the interview to obtain valid data, (b) reducing the data by making abstraction, (c) classifying and identifying the data to draw the conclusion from the data. The results of the study reveal that: (1) the understanding of high achiever (ST): (a) understanding on ϵ and δ is categorized as relational, (b) understanding on quantifier sentence is instrumental understanding; whereas, understanding on implication sentence is relational understanding, (c) understanding on absolute value as a distance is categorized as relational understanding, (d) understanding on function and graph of function is categorized as relational understanding, (e) understanding on the implementation of formal definition of limit function to prove the truth of limit value is categorized as relational understanding; (2) the understanding of moderate achiever (SS): (a) understanding on ϵ and δ is categorized as relational understanding, (b) understanding on quantifier and implication sentence are considered as relational understanding, (c) understanding on absolute value as a distance is categorized as relational understanding, (d) understanding on function and graph of function is categorized as instrumental understanding, (e) understanding on the implementation of formal definition of limit function to prove the truth of limit value is categorized as instrumental understanding; (3) the understanding of low achiever (SR): (a) understanding on ϵ and δ is categorized as instrumental understanding; whereas, understanding on its relationship is relational understanding, (b) understanding on quantifier sentence is instrumental understanding; whereas, understanding on implication sentence is relational understanding (c) understanding on absolute value as a distance is categorized as instrumental understanding, (d) understanding on function and graph of function is categorized as relational understanding, (e) understanding on the implementation of formal definition of limit function to prove the truth of limit value is categorized as instrumental understanding.

Matematika merupakan salah satu wahana pendidikan yang mempunyai peranan penting untuk membentuk sumber daya manusia yang berkualitas. Matematika sebagai ilmu dasar, menjadi tiang perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Hal ini disebabkan karena matematika berfungsi sebagai penata nalar dan pembentuk sikap peserta didik. Matematika berpangkal pada logika, merupakan dasar dan pangkal tolak penemuan dan pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi dalam usaha meningkatkan kesejahteraan umat manusia. Oleh karena

itu, tidak dapat disangkal lagi bahwa untuk menunjang keberhasilan pembangunan nasional maka peran matematika sangat menentukan.

Konsep dalam matematika dapat diungkapkan dengan menggunakan definisi. Definisi yang dimaksud adalah ungkapan yang membatasi konsep (Soedjadi, 2000: 14). Banyak konsep di dalam matematika dapat dipahami terlebih dahulu mengalami pembayangan secara mental terhadap definisi suatu konsep. Dengan adanya definisi seseorang dapat membuat ilustrasi atau gambar atau lambang dari konsep yang didefinisikan. Bayangan mental tersebut dapat dipengaruhi oleh persepsi terhadap konsep atau ingatan terhadap pengetahuan yang terkait dengan konsep tersebut. Hal ini disebabkan karena persepsi itu sendiri merupakan proses penggunaan pengetahuan dalam ingatan untuk mendeteksi dan menginterpretasi stimulus yang diterima oleh indera. Hasil pembayangan mental tersebut merupakan suatu informasi yang akan diproses menjadi pengetahuan yang akan disimpan di dalam ingatan.

Salah satu konsep dalam Matematika adalah konsep limit fungsi. Limit fungsi merupakan salah satu pokok bahasan dalam mata kuliah kalkulus yang memegang peranan penting sebagai prasyarat untuk beberapa pokok bahasan lainnya. Konsep limit fungsi merupakan konsep dasar untuk membangun beberapa konsep kalkulus lainnya, misalnya konsep turunan dan integral. Hal ini menunjukkan bahwa konsep limit fungsi perlu dipahami dengan benar oleh mahasiswa agar konsep yang didasarkan pada konsep limit fungsi juga dapat dipahami dengan benar oleh mahasiswa.

Sebagaimana struktur materi ajar matematika di perguruan tinggi yang menekankan pemahaman matematika secara analitik, limit fungsi diperkenalkan setelah limit barisan (Bartle, 1999: 96). Pengetahuan yang mungkin terbentuk dalam skemata mahasiswa setelah mempelajari limit barisan adalah “jika suatu barisan mempunyai limit maka barisan tersebut konvergen”. Secara intuitif pemahaman mahasiswa terhadap makna kata “konvergen” adalah “menuju pada satu titik atau nilai”. Skemata tentang limit barisan akan diakomodasi ketika mahasiswa mempelajari pengetahuan baru tentang limit, yaitu limit fungsi. Ketika mahasiswa dihadapkan pada pemahaman awal tentang limit suatu fungsi, mereka banyak melibatkan ingatan terhadap arti kata “limit”. Kata “limit” umumnya diartikan sebagai “batas”. Dengan melibatkan ingatan terhadap arti kata limit, mahasiswa akan membentuk persepsi awal terhadap informasi definisi formal limit fungsi. Salah satu bentuk persepsi tersebut adalah interpretasi yang diungkap secara verbal yakni “nilai yang sangat dekat dengan suatu fungsi”.

Pembelajaran konsep limit fungsi diawali dengan menyajikan konsep tersebut secara intuitif sebelum definisi formal limit fungsi diberikan. Terdapat kecenderungan diantara mahasiswa mengungkapkan makna notasi limit fungsi berdasarkan pengertian intuitif limit fungsi dibandingkan menggunakan definisi formal limit fungsi. Bilamana mahasiswa diminta menjelaskan pengertian limit fungsi berdasarkan definisi formal limit fungsi tersebut, banyak diantara mahasiswa tidak dapat menjelaskan definisi limit fungsi tersebut.

Pemahaman terhadap definisi limit fungsi sangat penting karena hal ini menjadi landasan untuk memahami teorema-teorema limit selanjutnya. Definisi formal limit fungsi yang diajarkan dalam kegiatan perkuliahan kalkulus biasa dikenal dengan nama definisi ε (dibaca: epsilon) dan δ (dibaca: delta). Dalam definisi formal limit fungsi tampak adanya penggunaan bahasa matematika yang

sistematis dan simbol tertentu yakni ε - δ yang memiliki makna. Definisi formal yang dimaksud sebagaimana dituliskan dalam buku Kalkulus oleh Purcell adalah:

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan (betapapun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$, yakni $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Beberapa pertanyaan yang seringkali dimunculkan oleh mahasiswa terkait dengan definisi konsep limit fungsi, antara lain “apa makna ε dan δ dalam fungsi yang selalu bernilai real?”, “apa hubungan antara ε dan δ dalam kaitannya dengan fungsi bernilai real?”, atau “mengapa ε dan δ bernilai positif?”. Kemungkinan penyebab munculnya pertanyaan-pertanyaan ini adalah dosen pengajar materi definisi konsep limit fungsi tidak membuat representasi konsep limit fungsi dalam bentuk grafik fungsi. Hal ini mengindikasikan bahwa mahasiswa masih kebingungan memahami definisi konsep limit fungsi tersebut. Oleh karena itu, representasi kongkret yang biasa dilakukan dosen yang menanamkan pemahaman tentang makna ε - δ kepada mahasiswa adalah menganalogikan ε - δ sebagai selisih jarak terdekat dua benda untuk dapat mengatakan $\varepsilon > 0$ atau $\delta > 0$.

Berdasarkan observasi awal yang dilakukan oleh penulis, terdapat beberapa mahasiswa yang memaknai simbol ε (epsilon) dan δ (delta) pada definisi limit fungsi di satu titik sebagai suatu bilangan positif yang sangat kecil. Namun ada beberapa mahasiswa yang memaknai simbol ε (epsilon) dan δ (delta) masing-masing sebagai simbol yang bernilai positif yang sangat kecil yang menunjukkan jarak. ε dimaknai sebagai jarak $f(x)$ yang sangat dekat ke L dan δ dimaknai sebagai jarak x yang sangat dekat ke c . Hal ini mengindikasikan adanya perbedaan pemahaman mahasiswa dalam memaknai simbol ε (epsilon) dan δ (delta).

Hal lain yang ditemukan oleh penulis saat melakukan observasi awal adalah adanya perbedaan persepsi mahasiswa dalam mengaitkan ε dan δ . Beberapa mahasiswa mengaitkan nilai ε dan δ yang ditulis dalam kalimat matematika jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$ dengan cara menetapkan δ terlebih dahulu kemudian menetapkan ε . Namun ada juga mahasiswa yang berpendapat bahwa kita menetapkan ε terlebih dahulu kemudian menetapkan δ .

Berdasarkan uraian di atas, maka perlu diketahui bagaimana gambaran pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi. Pengetahuan tentang gambaran pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi dapat membantu dosen merefleksi pembelajaran konsep limit agar mahasiswa memiliki pemahaman yang sesuai dengan konsep limit fungsi. Hal inilah yang mendorong peneliti untuk mengangkat permasalahan dengan judul “Analisis Pemahaman Mahasiswa terhadap Konsep Limit Fungsi”.

Berdasarkan iuraikan sebelumnya, diajukan pertanyaan penelitian yaitu bagaimanakah deskripsi pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi di satu titik?

Hakikat Matematika

Istilah mathematics (Inggris), mathematik (Jerman), mathematique (Perancis), matematico (Itali), matematiceski (Rusia), atau mathematic/wiskunde (Belanda) berasal dari perkataan lain *mathematica*, yang mulanya diambil dari perkataan Yunani, *mathematike*, yang berarti “relating to learning”. Perkataan ini mempunyai akar kata *mathema* yang berarti pengetahuan atau ilmu (knowledge,

science). Perkataan *mathematike* berhubungan sangat erat dengan sebuah kata lainnya yang serupa, yaitu *mathanein* yang mengandung arti belajar (berpikir).

Namun demikian, sejumlah definisi atau ungkapan pengertian matematika yang ada itu bergantung pada tinjauan pembuat definisi itu sendiri. Abraham S. Luchins dan Edith N Luchins pernah mengatakan bahwa: "*In short, the question what is mathematics? May be answered difficulty depending on when the question is answered, where it is answered, who answer it, and what is regarded as being included in mathematics.*" Pendeknya, "Apakah matematika itu?" dapat dijawab secara berbeda-beda tergantung pada bilamana pertanyaan itu dijawab, di mana di jawab, siapa yang menjawab, dan apa sajakah yang dipandang termasuk dalam matematika."

Ada tokoh yang sangat tertarik dengan perilaku bilangan, ia melihat matematika dari sudut pandang bilangan itu. Tokoh lain lebih mencurahkan perhatian kepada struktur-struktur, ia melihat matematika dari sudut pandang struktur-struktur itu. Tokoh lain lagi lebih tertarik pada pola pikir ataupun sistematika, ia melihat matematika dari sudut pandang sistematika itu. Demikianlah sehingga banyak muncul definisi atau pengertian tentang matematika yang beraneka ragam. Atau dengan kata lain tidak terdapat satu definisi tentang matematika yang tunggal dan disepakati oleh semua tokoh atau pakar matematika.

Dengan demikian untuk menjawab pertanyaan "Apakah matematika itu?" tidak dapat dengan mudah dijawab dengan satu atau kalimat begitu saja. Berbagai pendapat muncul tentang pengertian matematika tersebut, dipandang dari pengetahuan dan pengalaman masing-masing yang berbeda. Matematika adalah medan eksplorasi dan penemuan. Di bawah ini disajikan beberapa definisi atau pengertian tentang matematika menurut para pakar matematika, yaitu 1) Matematika adalah bahasa simbol; 2) Matematika merupakan bahasa numerik; 3) Matematika adalah bahasa yang dapat menghilangkan sifat kabur, majemuk, dan emosional; 4) Matematika adalah metode berpikir logis; matematika adalah sarana berpikir; 5) Matematika adalah logika pada masa dewasa; 6) Matematika adalah ratunya ilmu dan sekaligus menjadi pelayannya; 7) Matematika adalah sains mengenai kuantitas dan besaran; 8) Matematika adalah sains yang bekerja menarik kesimpulan-kesimpulan yang perlu; 9) Matematika adalah sains formal yang murni; 10) Matematika adalah sains yang memanipulasi simbol;

Soedjadi (2007: 8) mengemukakan bahwa matematika memiliki karakteristik atau ciri-ciri khusus yang amat ketat, terutama adalah: 1) Matematika memiliki objek kajian yang abstrak (hanya ada dalam pikiran). Kata "segitiga" adalah nama suatu konsep yang abstrak, segitiganya hanya ada dalam pikiran; 2) Bertumpu pada kesepakatan (lebih bertumpu pada aksioma formal). Kesepakatan dalam banyak hal seperti simbol, istilah, pernyataan pangkal yang berlaku dalam lingkup internasional.; 3) Berpola pikir deduktif. Suatu sifat atau teorema atau prinsip pada awalnya mungkin saja diperoleh secara induktif, tetapi harus dikuatkan dengan cara deduktif; 4) Konsisten dalam sistemnya. Pada geometri Euclides mengatakan bahwa pada satu titik di luar suatu garis lurus dapat dibuat tepat satu garis yang sejajar dengan garis tersebut dan hal ini benar jika kita berbicara pada sistem geometri Euclides, tetapi pada geometri lain mengatakan bahwa pada satu titik di luar suatu garis dapat dibuat tak terhingga banyaknya garis yang sejajar garis tersebut dan ini pun benar dalam sistemnya; 5) Menggunakan simbol yang kosong dari arti. Pada umumnya sesuatu yang belum diketahui diberi simbol sep-

erti n yang berarti anggota bilangan asli, k adalah suatu konstanta real dan sebagainya; dan 6) Memperhatikan semesta pembicaraan. Seperti dikemukakan bahwa matematika konsisten pada sistemnya, maka semesta pembicaraan selalu diperhatikan.

Konsep dalam Matematika

Para ahli psikologi menyadari betapa pentingnya konsep dalam proses berpikir, sehingga definisi yang diberikan berdasarkan pandangannya masing-masing dan belum ada yang disepakati secara umum. Konsep merupakan istilah yang digunakan untuk menggambarkan secara abstrak suatu objek. Melalui konsep, diharapkan akan dapat menyederhanakan pemikiran dengan menggunakan istilah. De Block (Winkel, 2004: 75) mendefinisikan konsep adalah suatu arti yang mewakili sejumlah objek yang bercirikan sama, dalam bentuk lambang mental yang penuh gagasan.

Gagne (Ruseffendi, 2006: 157) mengungkapkan bahwa konsep adalah ide abstrak yang memungkinkan kita mengelompokkan benda-benda ke dalam contoh dan non contoh. Sedangkan menurut Dienes konsep itu adalah struktur matematika yang terdiri dari tiga macam: konsep murni matematika (*pure mathematical concepts*), konsep notasi (*notational concepts*), dan konsep terapan (*applied concepts*). Konsep murni matematika berkenaan dengan mengelompokkan bilangan dan hubungan antar bilangan tanpa mempertimbangkan bilangan itu disajikan (ditulis). Konsep notasi adalah sifat-sifat bilangan sebagai akibat dari bilangan itu disajikan. Konsep terapan adalah aplikasi konsep murni dan konsep notasi dalam pemecahan soal-soal matematika dan dalam bidang studi lain yang berhubungan.

Konsep merupakan salah satu obek kajian matematika yang mendasar dan penting. Hudoyo (2001: 136) mengemukakan bahwa suatu konsep matematika adalah suatu ide abstrak yang memungkinkan kita mengklasifikasikan obyek-obyek atau peristiwa-peristiwa serta mengklasifikasikan apakah obyek-obyek dan peristiwa-peristiwa itu termasuk atau tidak termasuk ke dalam ide abstrak tersebut. Menurut Posser (Takdirmin, 2010: 20) konsep adalah suatu abstraksi yang mewakili suatu kelas objek-objek, kejadian-kejadian, kegiatan-kegiatan, atau hubungan-hubungan yang mempunyai atribut-atribut yang sama. Soedjadi (2000: 14) mengemukakan bahwa konsep adalah ide abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan atau mengklasifikasikan sekumpulan objek, apakah objek tertentu merupakan contoh konsep ataukah bukan. Misalnya “segitiga” adalah nama suatu konsep abstrak yang dengan konsep ini sekumpulan objek dapat digolongkan sebagai contoh segitiga atau bukan contoh. “Bilangan asli” adalah nama suatu konsep yang lebih kompleks karena bilangan asli terdiri dari atas banyak konsep sederhana yaitu bilangan “satu”, “dua”, “tiga”, dan seterusnya.

Bell (Akib, 2001: 146) mengemukakan “*a concept in mathematics is an abstract idea which enable people to classify objects or events and to specify whether the objects and events are example or nonexample of the abstract idea*”. Konsep dalam matematika adalah ide abstrak yang memungkinkan seseorang untuk mengklasifikasikan objek atau kejadian dan mengelompokkan objek atau kejadian ke dalam contoh dan non contoh dari ide abstrak matematika tersebut.

Sutton dan Hagson (Suradi, 1994: 15) membagi konsep menurut fungsinya menjadi 3 macam yaitu: 1) Konsep klasifikasional adalah konsep yang memungkinkan orang dapat mengklasifikasikan obyek atau kejadian dan menggabungkan apakah suatu objek merupakan contoh atau bukan contoh; 2) Konsep korelasional

adalah konsep yang menunjukkan orang dapat menghubungkan dua atau lebih objek atau kejadian; dan 3) Konsep teoretis adalah konsep yang memungkinkan seseorang dapat menjelaskan fakta.

Pemahaman Konsep

Pemahaman adalah kemampuan seseorang untuk mengerti atau memahami sesuatu. Dengan kata lain, memahami adalah mengetahui tentang sesuatu dan dapat melihatnya dalam berbagai segi. Seseorang dikatakan memahami suatu hal apabila ia dapat memberikan penjelasan dan meniru hal tersebut dengan menggunakan kata-katanya sendiri. Winkel (2004: 274) mengemukakan bahwa pemahaman menacakup kemampuan untuk menangkap makna dan arti dari bahan yang dipelajari.

Pemahaman lebih tinggi satu tingkat dari hafalan. Pemahaman memerlukan kemampuan menangkap makna atau arti dari suatu konsep. Untuk itu, maka diperlukan adanya hubungan atau pertautan antara konsep dan makna atau arti dari suatu konsep. Gardner (Minggi, 2010: 31) mengemukakan bahwa pemahaman adalah salah satu aspek dalam belajar yang digunakan sebagai dasar mengembangkan model pembelajaran dengan memperhatikan indikator pemahaman. Anderson *et al.* Menyatakan *understand is defined as constructing the meaning of instructional messages, including oral, written, and graphic communication*. Pendapat tersebut menjelaskan bahwa seseorang dikatakan memahami sesuatu jika mereka mampu mengkonstruksi makna dari pesan-pesan pengajaran seperti komunikasi lisan, tulisan, dan grafik. Seseorang mampu memahami suatu pengetahuan baru ketika mampu membangun hubungan antara pengetahuan yang baru diintegrasikan tersebut dengan skema kognitif yang sudah ada padanya. Tingkat pemahaman seseorang terhadap suatu konsep dapat dilihat dari jenis-jenis pemahaman yang dimilikinya.

Tahun 1976, Richard Skemp mengkomunikasikan hasil studinya tentang pemahaman dalam pendidikan matematika. Dalam artikelnya yang terkenal, "*Relational Understanding and Instrumental Understanding*", (Skemp, 2005) dijelaskan pengkategorian pemahaman atas dua jenis pemahaman yaitu: (1) pemahaman instrumental dan (2) pemahaman relasional. Pemahaman instrumental didefinisikan sebagai "*rules without reasons*" atau dengan kata lain kemampuan seseorang menggunakan prosedur matematik untuk menyelesaikan suatu masalah tanpa mengetahui mengapa prosedur itu digunakan. Pemahaman relasional didefinisikan sebagai "*knowing what to do and why*" atau dengan kata lain kemampuan menggunakan suatu aturan dengan penuh kesadaran mengapa ia menggunakan aturan tersebut.

Pemahaman instrumental diartikan sebagai pemahaman konsep yang saling terpisah dan hanya hafal rumus dalam perhitungan rutin/sederhana. Dalam hal ini seseorang hanya memahami urutan pengerjaan atau algoritma. Pada tingkatan ini dapat dikatakan bahwa seseorang baru berada di tahap tahu atau hafal tetapi dia belum atau tidak tahu mengapa hal itu bisa dan dapat terjadi. Dalam menyelesaikan soal, seseorang hanya dapat menentukan hasil namun tidak dapat menjelaskan mengapa hasilnya seperti itu. Contohnya seseorang dapat menjawab bahwa hasil dari $7 \times 11 = 77$, tetapi dia tidak mampu menjelaskan mengapa $7 \times 11 = 77$. Contoh lain yaitu seseorang dapat membuktikan nilai limit suatu fungsi dengan menggunakan definisi formal limit fungsi, tetapi tidak mampu menjelaskan langkah-langkah pembuktian yang dia lakukan. Dengan kata lain dia tidak

dapat menjelaskan mengapa rangkaian (kalimat) bukti yang dituliskannya membuktikan limit tersebut. Atau mahasiswa mampu memilih nilai δ yang tepat untuk membuktikan nilai limit fungsi tersebut tetapi tidak mampu menjelaskan alasan pemilihan δ tersebut atau mahasiswa tidak mampu menentukan nilai δ untuk kasus yang serupa

Pemahaman relasional yaitu dapat mengaitkan sesuatu dengan hal lainnya secara benar dan menyadari proses yang dilakukan. Pada tahapan tingkatan ini, menurut Skemp, seseorang tidak hanya sekedar tahu dan hafal tentang suatu hal, tetapi dia juga tahu bagaimana dan mengapa hal itu dapat terjadi. Pemahaman relasional termuat skema atau struktur yang dapat digunakan pada penjelasan masalah yang lebih luas dan sifat pemakaiannya lebih bermakna. Dalam menyelesaikan soal, seseorang tidak hanya dapat menentukan hasil namun ia dapat menjelaskan mengapa hasilnya seperti itu. Contohnya dalam membuktikan nilai limit fungsi, seseorang tidak hanya dapat menuliskan rangkaian bukti dengan benar tetapi juga mampu menjelaskan setiap langkah-langkah pembuktiannya dan menjelaskan mengapa rangkaian bukti yang ditulisnya membuktikan limit tersebut. Atau mahasiswa mampu memilih nilai δ yang tepat untuk membuktikan nilai limit fungsi tersebut dan mampu menjelaskan alasan pemilihan δ tersebut atau mahasiswa mampu menentukan nilai δ untuk kasus yang serupa.

Ruseffendi (2006: 221) menyatakan tiga macam pemahaman yaitu: (1) perubahan (*translation*) dalam matematika misalnya mampu mengubah soal kata-kata ke dalam simbol dan sebaliknya; (2) pemberian arti (*interpretation*), misalnya mampu mengartikan suatu kesamaan; (3) pembuatan ekstrapolasi (*extrapolation*), misalnya mampu memperkirakan suatu kecenderungan dari diagram.

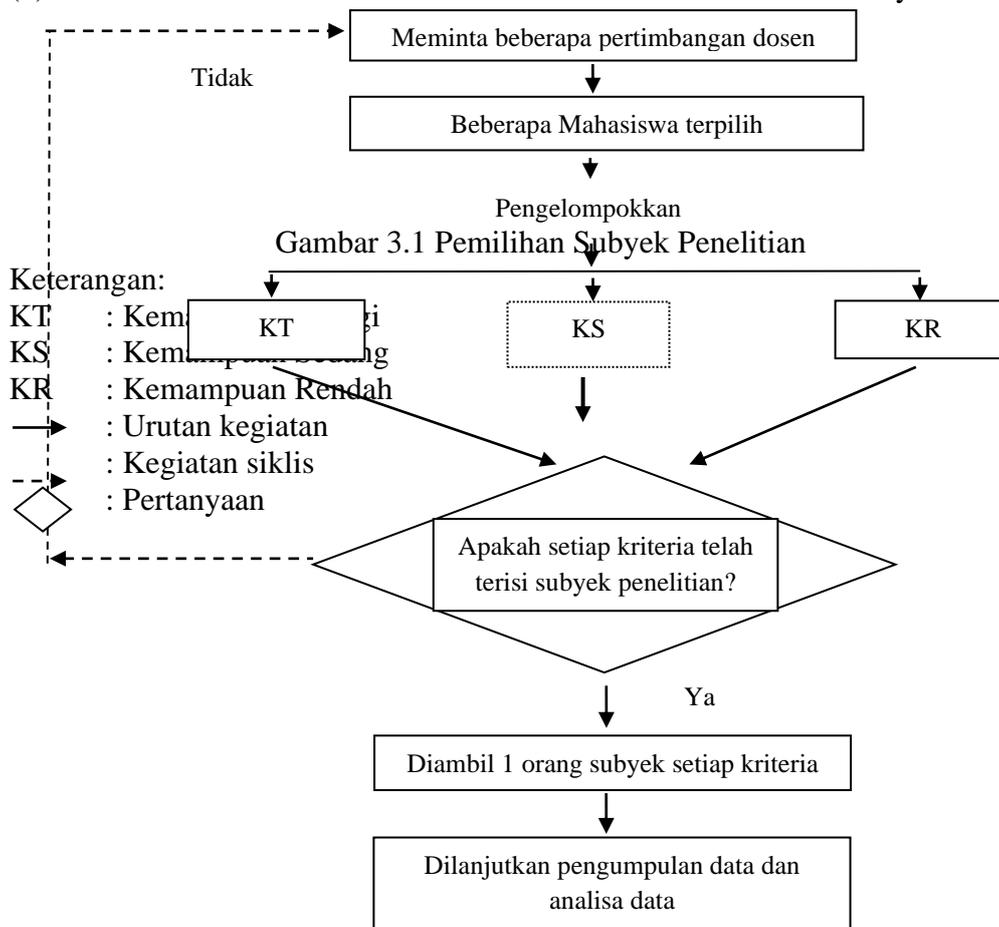
Terkait dengan proses mental yang berlangsung ketika seseorang mempelajari konsep-konsep matematika, seseorang mungkin dapat melihat dengan segera bahwa dua atau lebih konsep saling terkait. Sebagai contoh, beberapa mahasiswa mungkin dapat melihat dengan segera bahwa limit fungsi mungkin dapat dijelaskan melalui grafik limit fungsi atau melihat dengan segera bahwa limit fungsi tidak mungkin lebih dari satu nilai. Pada sisi lain, ketika diminta menunjukkan sifat ketunggalan fungsi tersebut, ia harus melakukannya dalam langkah demi langkah.

Davis (Akib, 2001: 146) menyebutkan empat kriteria seseorang dikatakan memahami konsep, yaitu: (a) dapat menyatakan atribut-atributnya, (b) dapat memberikan contoh dari konsep itu, (c) dapat memberikan noncontoh dari konsep, dan (d) dapat memberikan nama dan mendefinisikannya.

Indikator pemahaman instrumental adalah: (1) mampu menuliskan definisi formal limit fungsi tetapi tidak mampu menjelaskan dengan tepat keterkaitan simbol-simbol, konsep-konsep yang secara eksplisit tertulis dalam definisi formal limit fungsi, (2) mampu menuliskan dengan tepat bukti nilai limit suatu fungsi dengan menggunakan definisi formal limit fungsi tetapi tidak mampu menjelaskan dengan tepat langkah-langkah pembuktiannya. Indikator pemahaman relasional adalah: (1) mampu menuliskan definisi formal limit fungsi dan mampu menjelaskan dengan tepat keterkaitan simbol-simbol, konsep-konsep yang secara eksplisit tertulis dalam definisi, (2) mampu membuktikan dengan tepat nilai limit suatu fungsi dengan menggunakan definisi formal limit fungsi dan mampu menjelaskan dengan tepat langkah-langkah pembuktiannya.

Metode Penelitian

Jenis penelitian ini merupakan penelitian kualitatif yaitu bertujuan untuk menganalisis pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi. Penelitian ini akan dilaksanakan di Jurusan Matematika FMIPA UNM Makassar. Penelitian ini dilaksanakan di Program studi pendidikan Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNM Makassar. Subjek penelitian adalah mahasiswa yang telah mempelajari limit fungsi di satu titik dan dapat menuliskan definisi formal limit fungsi di satu titik. Subjek penelitian adalah mahasiswa semester VI. Dipilihnya mahasiswa semester VI dengan pertimbangan: (1) mahasiswa semester VI mempunyai waktu yang cukup lowong, sehingga memudahkan untuk dilakukan wawancara, (2) mahasiswa semester VI telah beradaptasi dengan suasana kampus, (3) karakteristik mahasiswa semester VI relatif dikenal baik oleh banyak dosen.

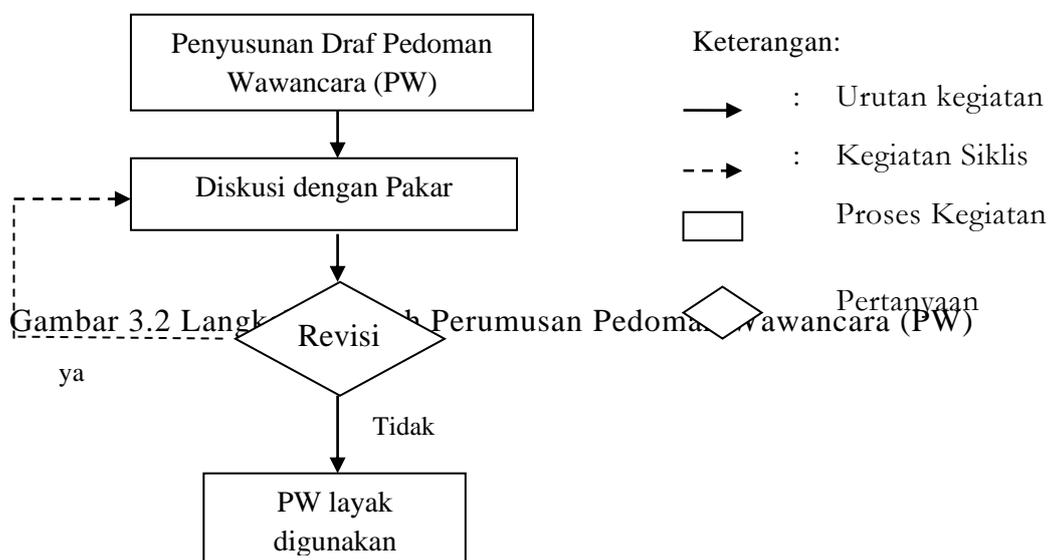


Fokus penelitian yang ditetapkan berfungsi mengarahkan peneliti sehingga dapat mencurahkan perhatian secara jelas apa yang semestinya diteliti agar pertanyaan penelitian dapat dijawab dengan sebaik-baiknya. Untuk menjawab pertanyaan penelitian dengan baik, maka fokus penelitian ini diarahkan untuk menganalisis pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi di satu titik yang meliputi: 1) Pemahaman instrumental adalah kemampuan seseorang menuliskan dan mengimplementasikan konsep limit fungsi di satu titik tetapi tidak mampu menjelaskan/ menuliskan alasannya. Indikator pemahaman instrumental adalah: a) mampu menuliskan definisi formal limit fungsi di satu titik tetapi tidak mampu menjelaskan dengan tepat keterkaitan simbol-simbol, konsep-konsep yang secara eksplisit tertulis dalam definisi formal limit fungsi di satu titik; dan b)

mampu membuktikan dengan tepat nilai limit suatu fungsi dengan menggunakan definisi formal limit fungsi tetapi tidak mampu menjelaskan dengan tepat langkah-langkah pembuktiannya. 2) Pemahaman relasional adalah kemampuan seseorang menuliskan dan mengimplementasikan konsep limit fungsi di satu titik dan mampu menjelaskan/ menuliskan alasannya. Indikator pemahaman relasional adalah: a) mampu menuliskan definisi formal limit fungsi di satu titik dan mampu menjelaskan dengan tepat keterkaitan simbol-simbol, konsep-konsep yang secara eksplisit tertulis dalam definisi; dan b) mampu membuktikan dengan tepat nilai limit suatu fungsi dengan menggunakan definisi formal limit fungsi dan mampu menjelaskan dengan tepat langkah-langkah pembuktiannya

Instrumen penelitian adalah peneliti sendiri. Dalam hal ini peneliti merupakan perencana, pelaksana pengumpul data, penganalisis, penafsir data, dan akhirnya menjadi pelapor hasil penelitian. Peneliti sebagai instrumen akan mempermudah menggali informasi yang menarik meliputi informasi: lain dari yang lain, yang tidak direncanakan sebelumnya, yang tidak diduga terlebih dahulu atau yang tidak lazim terjadi. Pada penelitian ini juga digunakan instrumen pendukung lainnya yaitu instrumen pedoman wawancara berbasis tugas. Instrumen pedoman wawancara tersebut memuat tugas dan pertanyaan-pertanyaan pokok yang akan diajukan kepada subjek penelitian. Tugas diberikan kepada subjek dalam wawancara untuk menelusuri bagaimana pemahaman subjek terhadap konsep limit fungsi.

Penggalian data melalui wawancara dilakukan dengan penggabungan wawancara terstruktur dan wawancara tak terstruktur. Langkah-langkah perumusan pedoman wawancara dapat dilihat pada skema berikut



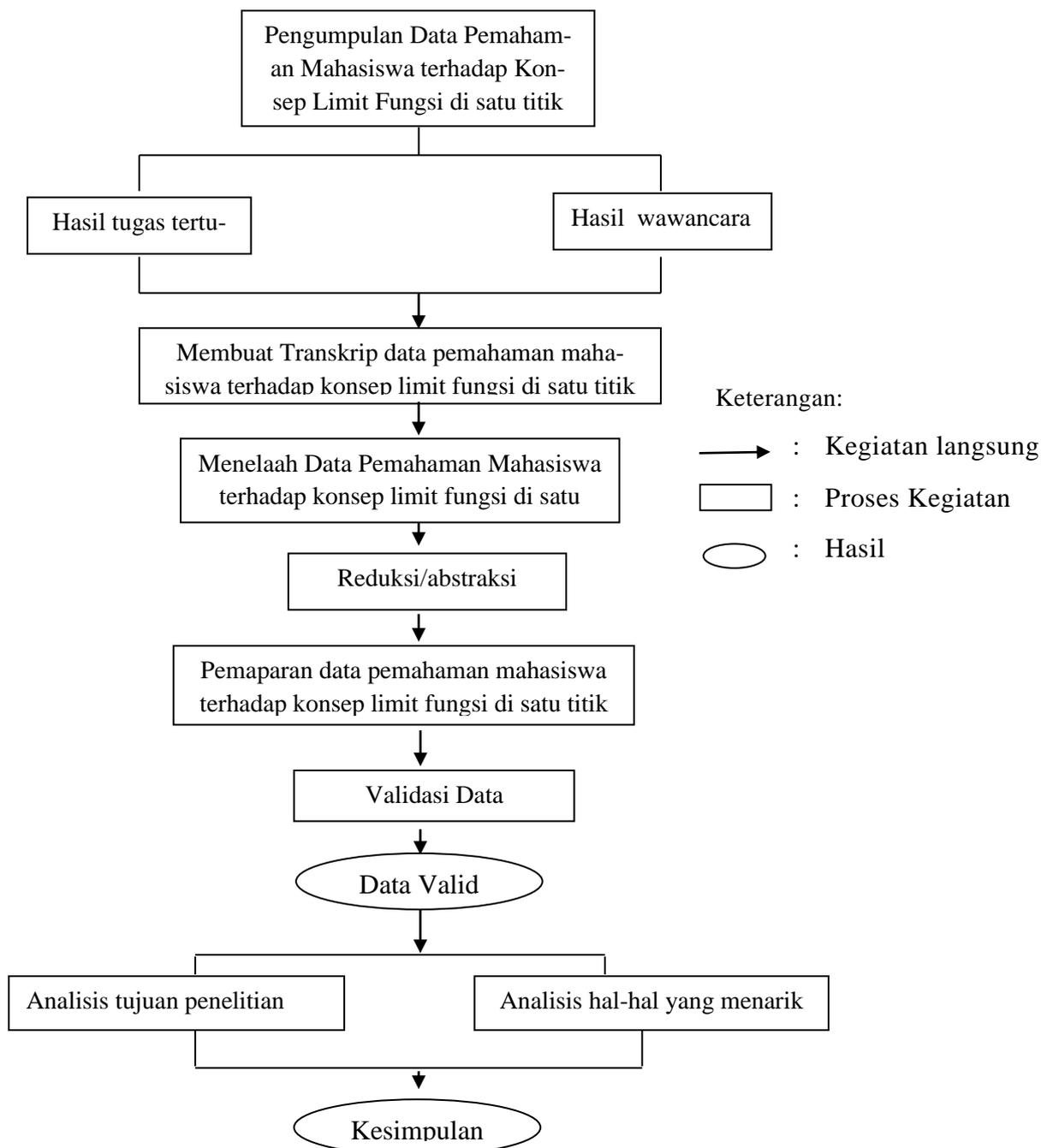
Pengumpulan data dalam penelitian ini akan dilakukan melalui wawancara berbasis tugas terhadap masing-masing subjek penelitian yaitu tugas diberikan kepada subjek. Selanjutnya dilakukan wawancara untuk mempelajari/menelusuri alasan subjek mengambil kesimpulan itu. Pemahaman subjek penelitian dipelajari melalui interpretasi atau representasi yang diberikan subjek dalam menjawab pertanyaan-pertanyaan pewawancara. Wawancara tersebut akan direkam.

Beberapa hal yang diperhatikan dalam wawancara berbasis tugas pada penelitian ini adalah objektivitas. Objektivitas merujuk pada hubungan pewa-

wawancara dan responden. Pewawancara memberi kebebasan kepada responden, apa saja yang berkaitan dengan permasalahan yang diberikan. Tujuannya adalah untuk meminimalkan pengaruh pewawancara terhadap subjek. Di samping itu, pewawancara seminimal mungkin membantu subjek dalam menjawab permasalahan secara tersurat maupun tersirat untuk mengarahkan ke arah jawaban yang dikehendaki pewawancara, seperti memberi petunjuk atau motivasi yang dapat mempengaruhi proses berpikir subjek. Keabsahan data merupakan konsep penting dalam penelitian kualitatif. Pemeriksaan terhadap keabsahan data bertujuan untuk mengurangi bias yang terjadi pada saat pengumpulan data. Uji keabsahan data ditekankan pada uji validitas dan reliabilitas. Arikunto (2010: 58) mengemukakan bahwa sebuah data atau informasi dapat dikatakan valid apabila sesuai dengan keadaan senyatanya.

Miles dan Huberman (Sugiyono, 2006: 276) mengemukakan bahwa aktivitas dalam analisis data kualitatif dilakukan secara interaktif dan berlangsung secara terus menerus sampai tuntas, sehingga datanya sudah jenuh. Dalam analisis data dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut: 1) Reduksi data adalah kegiatan yang mengacu kepada proses menyeleksi, memfokuskan, mengabstraksikan, dan mentransformasikan data mentah. Reduksi data dalam penelitian ini dilakukan dengan membuat rangkuman yang terdiri dari: inti, proses, dan pernyataan-pernyataan yang sesuai dengan tujuan penelitian. Kata-kata subjek yang tidak sesuai dengan tujuan penelitian dihilangkan. Validasi data dilakukan pada saat pengumpulan data berlangsung, yaitu dengan cara verifikasi. Pada penelitian ini verifikasi data yang digunakan adalah triangulasi waktu yaitu dilakukan dengan memeriksa data dari seorang subjek dengan waktu yang berbeda; 2) Penyajian data (*display data*) yang meliputi pengklasifikasian dan identifikasi data, yaitu menuliskan kumpulan data yang terorganisir dan terkategori sehingga memungkinkan untuk menarik kesimpulan dari data tersebut. Dalam penelitian ini, data hasil wawancara tentang pemahaman subjek terhadap konsep limit fungsi di satu titik yang telah direduksi dikategorikan berdasarkan indikator pada setiap aspek yang diamati. Hal ini dimaksudkan agar informasi yang diperoleh dengan mudah dapat disimpulkan. Untuk memudahkan pemaparan data pemahaman subjek terhadap konsep limit fungsi di satu titik, maka dilakukan coding pada petikan jawaban subjek penelitian saat wawancara. Dalam penelitian ini kode yang digunakan adalah: Sij-k (subjek ke-i, wawancara ke-j, item pertanyaan/jawaban ke-k), sebagai contoh kode ST1-003 diartikan petikan jawaban urutan ke 3 pada wawancara pertama oleh subjek tinggi; 3) Melakukan pemeriksaan keabsahan data pemahaman subjek terhadap konsep limit fungsi di satu titik dengan cara membandingkan data wawancara. Data yang valid adalah data atau informasi yang konsisten dari kedua wawancara; dan 4) Menarik kesimpulan penelitian dari data yang sudah dikumpulkan dan memverifikasi kesimpulan tersebut. Kesimpulan dalam penelitian deskripsi atau gambaran pemahaman tiap subjek penelitian terhadap konsep limit fungsi di satu titik.

Hasil analisis tes tertulis dan wawancara akan digunakan untuk memperkuat informasi tentang deskripsi pemahaman subjek terhadap konsep limit fungsi. Skema analisis data dapat dilihat di bawah ini



Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dijawab pertanyaan pada Bab I yaitu “bagaimanakah deskripsi pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi?”

Pemahaman Subjek Tinggi (ST) terhadap Konsep Limit Fungsi di Satu Titik: 1) *Pemahaman terhadap ε (Epsilon) dan δ (Delta):* Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek tinggi terhadap ε (epsilon) dan δ (delta) dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek tinggi mampu menjelaskan makna ε (epsilon) dan δ (delta) serta keterkaitan keduanya dengan tepat; 2) *Pemahaman terhadap Logika Kalimat Berkuantor dan Implikasi:* Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek tinggi

terhadap logika kalimat berkuantor dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam kategori pemahaman instrumental karena subjek tinggi belum mampu menjelaskan dengan tepat makna dari suatu kuantor berganda dalam definisi formal limit fungsi di satu titik. Sedangkan pemahaman subjek tinggi terhadap logika implikasi termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek tinggi mampu menjelaskan dengan tepat bilamana suatu implikasi bernilai benar; 3) *Pemahaman terhadap Harga Mutlak Sebagai Jarak*: Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek tinggi terhadap harga mutlak sebagai jarak dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek tinggi mampu menjelaskan dengan tepat makna nilai mutlak dalam definisi formal limit fungsi; 4) *Pemahaman terhadap Fungsi dan Grafik Fungsi*: Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek tinggi terhadap fungsi dan grafik fungsi pada konsep limit fungsi dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek sedang mampu menjelaskan dengan tepat definisi formal limit fungsi dalam grafik dan mampu mengaitkan definisi formal limit fungsi dengan makna limit secara intuitif; dan 5) *Pemahaman dalam Mengimplementasikan Definisi Formal Limit Fungsi untuk Membuktikan Kebenaran Suatu Limit*: Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek tinggi dalam mengimplementasikan definisi formal limit fungsi untuk membuktikan kebenaran suatu limit dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek tinggi mampu menuliskan dengan tepat langkah-langkah pembuktiannya dan mampu menjelaskan setiap langkah yang dilakukan dengan tepat.

Pemahaman Subjek Sedang (SS) terhadap Konsep Limit Fungsi di Satu Titik. 1) *Pemahaman terhadap ϵ (Epsilon) dan δ (Delta)*: Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek sedang terhadap ϵ (epsilon) dan δ (delta) dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek sedang mampu menjeaskan makna ϵ (epsilon) dan δ (delta) serta keterkaitan antara keduanya dengan tepat; 2) *Pemahaman terhadap Logika Kalimat Berkuantor dan Implikasi*: Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek sedang terhadap logika kalimat berkuantor dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek sedang mampu menjelaskan dengan tepat makna dari suatu kuantor berganda dalam definisi formal limit fungsi. Sedangkan pemahaman subjek sedang terhadap logika implikasi juga termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek sedang mampu menjelaskan dengan tepat bilamana suatu implikasi bernilai benar. 3) *Pemahaman terhadap Harga Mutlak Sebagai Jarak*: Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek sedang terhadap fungsi dan grafik fungsi pada konsep limit fungsi dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam kategori pemahaman instrumental karena subjek sedang belum mampu menjelaskan dengan tepat definisi formal limit fungsi dalam grafik dan belum mampu mengaitkan definisi formal limit fungsi dengan makna limit secara intuitif; 4) *Pemahaman dalam Mengimplementasikan Definisi Formal Limit Fungsi untuk Membuktikan Kebenaran Suatu Limit*: Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek sedang dalam mengimplementasikan definisi formal limit fungsi untuk membuktikan kebenaran suatu limit dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam

kategori pemahaman instrumental karena subjek sedang mampu menuliskan dengan tepat langkah-langkah pembuktiannya tetapi belum mampu menjelaskan setiap langkah yang dilakukan dengan tepat.

Pemahaman Subjek Rendah (SR) terhadap Konsep Limit Fungsi di Satu Titik: 1) *Pemahaman terhadap ε (Epsilon) dan δ (Delta)*: Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek rendah terhadap makna ε dan δ dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam kategori pemahaman instrumental karena subjek rendah belum mampu menjelaskan dengan tepat makna ε dan δ . Sedangkan pemahaman subjek rendah terhadap kaitan ε dan δ termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek rendah mampu menjelaskan dengan tepat kaitan antara ε dan δ ; 2) *Pemahaman terhadap Logika Kalimat Berkuantor dan Implikasi*: Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek rendah terhadap harga mutlak sebagai jarak dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam kategori pemahaman instrumental karena subjek rendah belum mampu menjelaskan dengan tepat makna nilai mutlak dalam definisi formal limit fungsi; 3) *Pemahaman terhadap Fungsi dan Grafik Fungsi*: Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek rendah terhadap fungsi dan grafik fungsi pada konsep limit fungsi dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek rendah mampu menjelaskan dengan tepat definisi formal limit fungsi dalam grafik; 3) *Pemahaman dalam Mengimplementasikan Definisi Formal Limit Fungsi untuk Membuktikan Kebenaran Suatu Limit*: Berdasarkan hasil analisis data tersebut di atas, disimpulkan bahwa pemahaman subjek rendah dalam mengimplementasikan definisi formal limit fungsi untuk membuktikan kebenaran suatu limit dikaitkan dengan teori pemahaman Skemp termasuk dalam kategori pemahaman instrumental karena subjek rendah belum mampu menjelaskan setiap langkah yang dilakukan dengan tepat.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis analisis data, maka dapat disimpulkan sebagai berikut: 1) Pemahaman Subjek Tinggi (ST) terhadap Konsep Limit Fungsi di Satu Titik: a) Pemahaman terhadap ε (epsilon) dan δ (delta) termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek tinggi mampu menjelaskan makna ε (epsilon) dan δ (delta) serta keterkaitan keduanya dengan tepat. Yaitu ε (epsilon) dan δ (delta) dimaknai sebagai bilangan positif yang kecil yang menunjukkan jarak dan kaitan keduanya adalah δ (delta) bergantung pada ε (epsilon); b) Pemahaman terhadap logika kalimat berkuantor termasuk dalam kategori pemahaman instrumental karena subjek tinggi belum mampu menjelaskan dengan tepat makna suatu kuantor berganda dalam definisi formal limit fungsi di satu titik yaitu subjek tinggi memahami makna $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ dan makna $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0$ sama. Sedangkan pemahaman terhadap logika implikasi termasuk dalam kategori pemahaman relasional mampu menjelaskan dengan tepat bilamana suatu implikasi bernilai benar; c) Pemahaman terhadap harga mutlak sebagai jarak termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena mampu menjelaskan dengan tepat makna nilai mutlak dalam definisi formal limit fungsi. $0 < |x - 2| < \delta$ dipahami bahwa jarak x ke 2 tidak akan pernah sama dengan 0 atau

$x \neq 2$. $|f(x) - 3| < \varepsilon$ dipahami bahwa jarak $f(x)$ ke 3 kurang dari ε dan jarak $f(x)$ ke 3 bisa sama dengan 0; d) Pemahaman terhadap fungsi dan grafik fungsi termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek mampu menjelaskan dengan tepat definisi formal limit fungsi di satu titik dalam bentuk grafik. Subjek memahami bahwa fungsi $f(x)$ tidak harus terdefinisi pada c . Dalam grafik fungsi limit, yang didekati terlebih dahulu adalah titik c , tetapi sebelumnya ditentukan jaraknya yaitu nilai δ yang bergantung pada ε . Ketika titik c didekati dari titik-titik yang berada pada daerah δ maka nilai fungsinya akan mendekati L ; dan e) Pemahaman dalam mengimplementasikan definisi formal limit fungsi untuk membuktikan kebenaran nilai limit termasuk dalam kategori pemahaman relasional. Subjek melakukan analisis awal untuk memperoleh nilai δ karena subjek memahami bahwa hal yang harus ditunjukkan untuk membuktikan kebenaran limit adalah menemukan δ untuk setiap ε yang diberikan yang menyebabkan kalimat implikasi bernilai benar. Subjek memahami bahwa δ yang diperoleh tidak tunggal. 2) Pemahaman Subjek Sedang (SS) terhadap Konsep Limit Fungsi di Satu Titik: a) Pemahaman terhadap ε (epsilon) dan δ (delta) termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek sedang mampu menjelaskan makna ε (epsilon) dan δ (delta) serta keterkaitan keduanya dengan tepat. Subjek sedang memahami ε (epsilon) dan δ (delta) sebagai suatu nilai pendekatan yang menunjukkan jarak yang merupakan bilangan real positif. Kaitan keduanya adalah δ (delta) bergantung pada ε (epsilon); b) Pemahaman terhadap logika kalimat berkuantor termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek mampu menjelaskan dengan tepat makna suatu kuantor berganda dalam definisi formal limit fungsi di satu titik yaitu subjek sedang memahami bahwa makna $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ berbeda dengan makna $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0$. Pemahaman terhadap logika implikasi termasuk dalam kategori pemahaman relasional mampu menjelaskan dengan tepat bilamana suatu implikasi bernilai benar yaitu ketika pernyataan keduanya ($|f(x) - L| < \varepsilon$) bernilai benar sehingga yang diperhatikan adalah pernyataan keduanya; c) Pemahaman terhadap harga mutlak sebagai jarak termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena mampu menjelaskan dengan tepat makna nilai mutlak dalam definisi formal limit fungsi. Subjek mengilustrasikan makna nilai mutlak dalam bentuk garis bilangan untuk menunjukkan harga mutlak sebagai jarak. $0 < |x - c| < \delta$ dipahami bahwa jarak x ke c tidak akan pernah sama dengan 0 atau $x \neq c$. $|f(x) - L| < \varepsilon$ dipahami bahwa jarak nilai fungsinya ($f(x)$) ke nilai limitnya (L) kurang dari ε ; d) Pemahaman terhadap fungsi dan grafik fungsi termasuk dalam kategori pemahaman instrumental karena belum mampu menjelaskan dengan tepat definisi formal limit fungsi di satu titik dalam bentuk grafik. Subjek memahami bahwa definisi limit secara grafik kontradiksi dengan definisi limit fungsi menggunakan $\varepsilon - \delta$ karena secara grafik, yang didekati terlebih dahulu adalah c , sedangkan berdasarkan definisi $\varepsilon - \delta$ yang diambil pertama adalah nilai-nilai pada daerah ε ; dan e) Pemahaman dalam mengimplementasikan definisi formal limit fungsi untuk membuktikan kebenaran nilai limit termasuk dalam kategori pemahaman instrumental. Subjek memahami bahwa hal yang harus ditunjukkan untuk membuktikan kebenaran nilai limit adalah menunjukkan bahwa untuk setiap ε

yang diambil, selalu ada δ sebagai padanannya. Langkah awal dalam membuktikan adalah dimulai dari pernyataan kedua, namun langkah tersebut dilakukan berdasarkan pengalaman belajarnya. Subjek memahami bahwa δ yang diperoleh tidak tunggal. 3) Pemahaman Subjek Rendah (SR) terhadap Konsep Limit Fungsi di Satu Titik: a) Pemahaman terhadap makna ε (epsilon) dan δ (delta) termasuk dalam kategori pemahaman instrumental karena subjek belum mampu menjelaskan dengan tepat makna ε dan δ . Subjek memahami ε dan δ berdasarkan data yang secara eksplisit terdapat dalam definisi formal limit fungsi yaitu $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$. Subjek tidak mampu menjelaskan alasan mengapa ε dan δ tidak boleh sama dengan 0. Pemahaman terhadap kaitan keduanya termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek mampu menjelaskan keterkaitan keduanya dengan tepat yaitu δ (delta) bergantung pada ε (epsilon); b) Pemahaman terhadap logika kalimat berkuantor termasuk dalam kategori pemahaman instrumental karena subjek belum mampu menjelaskan dengan tepat makna suatu kuantor berganda dalam definisi formal limit fungsi di satu titik yaitu subjek tinggi memahami makna $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ dan makna $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0$ sama. Sedangkan pemahaman terhadap logika implikasi termasuk dalam kategori pemahaman relasional mampu menjelaskan dengan tepat bilamana suatu implikasi bernilai benar; c) Pemahaman terhadap harga mutlak sebagai jarak termasuk dalam kategori pemahaman instrumental karena belum mampu menjelaskan dengan tepat makna nilai mutlak dalam definisi formal limit fungsi. $0 < |x - 2| < \delta$ dipahami bahwa titik-titik persekitaran 2 pada daerah sumbu x dengan jarak δ . $|f(x) - L|$ dipahami bahwa jarak $f(x)$ ke 3. Tetapi subjek memahami bahwa makna $|x - 2|$ dan makna $|2 - x|$ berbeda. Demikian juga makna $|f(x) - L|$ dan makna $|L - f(x)|$ dipahami oleh subjek mempunyai makna yang berbeda; d) Pemahaman terhadap fungsi dan grafik fungsi termasuk dalam kategori pemahaman relasional karena subjek mampu menjelaskan dengan tepat definisi formal limit fungsi di satu titik dalam bentuk grafik. Subjek memahami bahwa terdapat relasi antara titik-titik di persekitaran c (dalam hal ini $c = 1$) dan titik persekitaran L (dalam hal ini $L = 3$). Dalam grafik fungsi limit, yang didekati terlebih dahulu adalah titik c , tetapi sebelumnya subjek menentukan radius (δ) atau jarak antara persekitaran yang diambil terhadap titik c ($c = 1$); dan e) Pemahaman dalam mengimplementasikan definisi formal limit fungsi untuk membuktikan kebenaran nilai limit termasuk dalam kategori pemahaman instrumental. Subjek mengaitkan konsep implikasi dalam membuktikan sehingga langkah awal pembuktian dimulai dari pernyataan kedua ($|f(x) - L| < \varepsilon$). Tetapi subjek bingung apakah langkah yang dituliskan sudah membuktikan kebenaran nilai limit atau belum. Subjek juga memahami bahwa δ yang diperoleh merupakan satu-satunya nilai δ yang memenuhi atau yang mengakibatkan pernyataan implikasi bernilai benar. Dengan kata lain δ tunggal.

Daftar Pustaka

- Abidin, Zainal. 2011. <http://www.masbied.com/2011/09/02/definisi-pemahaman-menurut-para-ahli/>. Diakses 14 November 2011.
- Akib, Irwan. 2001. "Analisis Kesulitan Mahasiswa dalam Memahami Konsep-Konsep dalam Struktur Aljabar". *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*. Makassar: Jurusan Matematika FMIPA UNM.

- Apostol, Tom. 1966. *Calculus Volume 1 Second Edition*. California.
- Arikunto, Suharsimi. 2010. *Dasar-Dasar Evaluasi Pendidikan*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Badriyah. 2011. <http://id.shvoong.com/social-sciences/education/2137417-pengertian-pemahaman-siswa/>. Diakses, 18 November 2011.
- Badudu. 1996. *Kamus Umum Bahasa Indonesia*. Jakarta: Pustaka Sinar Harapan.
- Bartle, R. G. 1999. *Introduction to Real Analysis Third Edition*. New York.
- Dosen-dosen Jurusan Matematika. 2004. *Kalkulus I*. Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA ITS.
- Minggi, Ilham. 2010. Profil Intuisi Mahasiswa dalam Memahami Konsep Limit Fungsi Berdasarkan Perbedaan Gender. *Disertasi* Tidak diterbitkan. Surabaya: PPs Unesa.
- Purcell. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.
- Rahman, Abdul. 2002. "Pembentukan, Pemahaman, dan Pengajaran Konsep Matematika". *Jurnal Ilmiah Pendidikan MIPA*. Makassar: FMIPA UNM Makassar.
- Ruseffendi. 2006. *Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.
- Santrock, John W. 2007. *Psikologi Pendidikan*. Jakarta: Kencana.
- Skemp, R. 1987. *The Psychology of Learning Mathematics*. Expanded American Edition. New Jersey: Lawrence Elbaum Associates. Publishers.
- Skemp, R. 2005. *Relational Understanding and Instrumental Understanding*. <http://www.blog.republicofmath.com/archives/654>. Diakses, 18 November 2011.
- Soedjadi, R. 2000. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia, Konstatasi Keadaan Masa Kini Menuju Harapan Masa Depan*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Departemen Pendidikan Nasional.
- Sudirman. 2010. Profil Kesalahan Siswa dalam Menjawab Soal Limit Fungsi dan Alternatif Mengatasinya pada Siswa Kelas XI-IA SMA Negeri 15 Makassar. Tesis. Tidak diterbitkan. Makassar: PPs UNM.
- Sugiyono. 2006. *Metode Penelitian Kuantitatif Kualitatif Dan R & D*. Bandung: Alfabeta.
- Suradi. 2001. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*. Makassar: Jurusan Matematika FMIPA UNM.
- Suradi, dkk. 1994. *Penelitian Studi Eksplorasi Penguasaan Konsep Pecahan di Sekolah Dasar. Laporan Hasil*. Ujung Pandang: Lembaga Penelitian Institut Keguruan dan Ilmu Pengetahuan.
- Syamri, La Ode. 2010. <http://id.shvoong.com/writing-and-speaking/2035426-pengertian-konsep/>. Diakses, 18 November 2011.
- Winkel, W. S. 2004. *Psikologi Pengajaran*. Yogyakarta: Media Abadi