

STUDI LITERATUR: PERKEMBANGAN PENELITIAN GRAF PLANAR DAN APLIKASINYA DALAM MATEMATIKA DAN KOMPUTASI

Ramadhan Herianto^{1)*}, Minarni Ikhrimah Harahap²⁾, Almira Amir³⁾

^{1,2,3}Tadris Matematika, Pascasarjan, Universitas Islam Negeri Syekh Ali Hasan Ahmad Addary Padangsidimpuan, Jl. T. Rizal Nurdin No.KM 4 RW 5, Padangsidimpuan, 22721, Indonesia

✉ ramadhanherianto11@gmail.com

ARTICLE INFO**Article History:**

Received: 19/11/2025

Revised: 21/12/2025

Accepted: 31/12/2025

ABSTRAK

Graf planar merupakan salah satu objek kajian fundamental dalam teori graf yang memiliki peranan penting dalam pengembangan matematika murni maupun penerapannya pada ilmu komputer dan rekayasa sistem. Seiring dengan meningkatnya kebutuhan akan efisiensi komputasi dan pemodelan sistem kompleks, penelitian mengenai graf planar terus berkembang baik dari sisi teoritis maupun aplikatif. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis secara terfokus tren, fokus kajian, dan arah pengembangan penelitian graf planar berdasarkan sepuluh artikel ilmiah terpilih yang terindeks Scopus dan Sinta pada periode 2013–2024. Metode yang digunakan adalah studi literatur kualitatif dengan instrumen utama berupa lembar analisis dokumen yang memuat aspek topik penelitian, metode, kontribusi teoretis, serta aplikasi yang dibahas. Teknik pengumpulan data dilakukan melalui penelusuran basis data jurnal ilmiah dan seleksi artikel berdasarkan kriteria relevansi dan kebaruan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kajian graf planar saat ini terkonsentrasi pada empat arah utama, yaitu peningkatan efisiensi algoritme embedding dan branch-decomposition, generalisasi teorema klasik seperti Euler dan Kuratowski, pengembangan graf planar dalam kerangka fuzzy dan neutrosophic, serta penerapannya dalam optimasi tata letak sistem elektronik (VLSI) dan visualisasi data. Kesimpulan dari penelitian ini menegaskan bahwa riset graf planar telah mengalami pergeseran signifikan dari kajian teoretis murni menuju pendekatan multidisipliner yang berorientasi pada pemecahan masalah nyata dalam era komputasi modern.

Kata Kunci: graf planar, planar embedding, fuzzy graph, branch-decomposition, upward planar

ABSTRACT

Planar graphs are one of the fundamental objects of study in graph theory, playing an important role in the development of pure mathematics as well as its applications in computer science and systems engineering. Along with the increasing demand for computational efficiency and modeling of complex systems, research on planar graphs continues to evolve both theoretically and practically. This study aims to comprehensively analyze the trends, focus, and directions of planar graph research based on ten recent scientific articles indexed in Scopus and Sinta from 2013 to 2024. The method used is a qualitative literature study, with the main instrument being a document analysis sheet that includes aspects such as research topics, methods, theoretical contributions, and discussed applications. Data collection techniques are carried out through scientific journal database searches and article selection based on relevance and novelty criteria. The research results show that current studies on planar graphs are concentrated on four main directions: improving the efficiency of embedding and branch-decomposition algorithms, generalizing classical theorems such as Euler's and Kuratowski's, developing planar graphs within fuzzy and neutrosophic frameworks, and their application in optimizing electronic system layouts (VLSI) and data visualization. The conclusion of this study confirms that planar graph research has undergone a significant shift from purely theoretical studies toward a multidisciplinary approach aimed at solving real-world problems in the modern computing era.

Keywords: planar graph, planar embedding, fuzzy graph, branch-decomposition, upward planar

This is an open access article under the [CC-BY-SA](#) license



Cara Menulis Sitasi: Herianto, R., Harahap, M. I., & Amir, A. (2025). Studi Literatur: Perkembangan Penelitian Graf Planar dan Aplikasinya dalam Matematika dan Komputasi. SIGMA: Jurnal Pendidikan Matematika, 17(2), 884–893. <https://doi.org/10.26618/jp4vc902>

Pendahuluan

Graf planar merupakan salah satu struktur fundamental dalam teori graf yang memiliki peran penting baik dalam pengembangan matematika murni maupun dalam berbagai aplikasi ilmu komputer modern. Suatu graf dikatakan planar apabila dapat direpresentasikan pada bidang datar sedemikian sehingga tidak terdapat sisi yang saling berpotongan, kecuali pada titik ujungnya. Konsep ini menjadi salah satu pijakan utama dalam memahami keterkaitan antara struktur diskret dan representasi geometris, yang pada akhirnya berkontribusi pada perkembangan berbagai cabang matematika dan ilmu komputasi. Akar historis kajian graf planar dapat ditelusuri hingga karya klasik Leonhard Euler melalui permasalahan Jembatan Königsberg pada tahun 1736, yang menjadi fondasi awal lahirnya teori graf sebagai disiplin matematika diskret, yang kemudian berkembang lebih lanjut hingga mencakup kajian keplanaran graf dan representasi graf pada bidang datar. permasalahan Jembatan Königsberg pada tahun 1736, yang melahirkan Teorema Euler sebagai fondasi awal teori graf dan kajian keplanaran (Diestel, 2017). Teorema ini tidak hanya memperkenalkan konsep hubungan antara simpul dan sisi, tetapi juga membuka jalan bagi pengembangan teori graf sebagai disiplin ilmiah yang mandiri.

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, graf planar tidak lagi dipahami semata-mata dari sisi topologis dan teoretis, melainkan juga dimanfaatkan sebagai alat analitis yang sangat penting dalam berbagai bidang terapan. Dalam ilmu komputer, graf planar digunakan secara luas dalam optimasi jaringan, pemetaan spasial, visualisasi data, serta perancangan algoritma yang efisien. Dalam bidang rekayasa sistem dan elektronika, khususnya desain sirkuit elektronik berskala besar atau *Very Large Scale Integration* (VLSI), graf planar menjadi model dasar untuk meminimalkan jumlah persilangan jalur, mengoptimalkan penggunaan ruang, serta meningkatkan keandalan dan efisiensi sistem (Tamassia, 2013; Di Battista & Frati, 2014). Kebutuhan praktis tersebut mendorong berkembangnya kajian graf planar yang semakin berorientasi pada aspek komputasional dan aplikatif.

Kajian literatur terdahulu menunjukkan bahwa penelitian graf planar mengalami pergeseran signifikan dari kajian struktural klasik menuju pendekatan algoritmik dan aplikatif. Sintesis terhadap temuan-temuan utama menunjukkan bahwa pergeseran ini ditandai oleh menurunnya fokus pada karakterisasi topologis murni dan meningkatnya perhatian pada efisiensi algoritme, representasi geometris, serta keterkaitannya dengan permasalahan komputasi nyata, seperti visualisasi graf dan desain sirkuit elektronik. struktural klasik menuju pendekatan algoritmik yang menekankan efisiensi komputasi. Berbagai penelitian menitikberatkan pada pengembangan algoritma pengujian keplanaran, algoritma embedding graf planar, branch-decomposition, serta teknik pewarnaan graf planar yang efisien untuk mendukung komputasi skala besar dan pemrosesan data kompleks (Bian dkk., 2016; Hopcroft

& Tarjan, 1974). Selain itu, sejumlah penelitian juga mengkaji generalisasi dan penguatan teorema klasik, seperti Teorema Euler dan Teorema Kuratowski, sebagai upaya memperluas karakterisasi graf planar dalam konteks graf khusus, graf terstruktur, dan graf dengan kendala tertentu (Borodin, 2013). Pendekatan ini menunjukkan bahwa teori graf planar masih memiliki ruang pengembangan yang luas, baik dari sisi teoretis maupun metodologis.

Dalam perkembangan mutakhir, riset graf planar menunjukkan kecenderungan integrasi dengan kerangka ketidakpastian melalui pengembangan fuzzy graph, neutrosophic graph, dan plithogenic graph. Pendekatan ini memungkinkan setiap simpul dan sisi dalam graf tidak hanya direpresentasikan secara biner, tetapi juga memiliki derajat keanggotaan yang merefleksikan tingkat kepastian, ketidakpastian, dan ketidaktepatan. Integrasi tersebut membuka peluang baru dalam pemodelan sistem kompleks yang bersifat dinamis dan tidak pasti, seperti sistem kecerdasan buatan, jaringan sosial, sistem pengambilan keputusan multikriteria, serta analisis big data (Smarandache, 2019; Broumi dkk., 2021). Dengan demikian, graf planar tidak lagi hanya berfungsi sebagai objek matematis statis, tetapi juga sebagai model fleksibel yang mampu merepresentasikan realitas sistem modern yang kompleks.

Meskipun demikian, sebagian besar penelitian terdahulu masih cenderung berdiri secara parsial, baik dengan fokus utama pada pengembangan teori dasar, efisiensi algoritmik, maupun penerapan praktis secara terpisah. Kajian yang secara eksplisit mengaitkan perkembangan teoretis graf planar, kemajuan algoritmik, serta integrasinya dengan kerangka ketidakpastian modern masih relatif terbatas. Kondisi ini menunjukkan adanya celah penelitian yang penting untuk dijembatani, khususnya dalam upaya menyusun pemahaman komprehensif mengenai arah dan tren perkembangan graf planar secara terpadu. Cela penelitian tersebut menunjukkan belum adanya kajian yang secara terpadu mengaitkan perkembangan teoretis graf planar, kemajuan algoritmik, serta perluasan ke dalam kerangka ketidakpastian modern. Berdasarkan kajian tersebut, kebaruan ilmiah artikel ini terletak pada penyusunan sintesis konseptual yang mengintegrasikan ketiga perspektif tersebut dalam satu kerangka analisis, sehingga menghasilkan klasifikasi tematik dan peta tren penelitian graf planar yang lebih utuh. Berdasarkan kajian tersebut, kebaruan ilmiah penelitian ini terletak pada penyusunan tinjauan komprehensif yang mengintegrasikan tiga perspektif utama, yaitu perkembangan teoretis graf planar, kemajuan algoritmik dan komputasional, serta perluasan konsep graf planar dalam kerangka ketidakpastian modern. Artikel ini tidak hanya merangkum dan mengklasifikasikan hasil-hasil penelitian terkini, tetapi juga menyusun peta konseptual yang mengaitkan ketiga pendekatan tersebut untuk menunjukkan arah baru riset graf planar yang relevan bagi pengembangan model analitis, algoritma cerdas, dan sistem berbasis data.

Asumsi konseptual yang mendasari kajian ini adalah bahwa integrasi graf planar dengan kerangka ketidakpastian, seperti fuzzy, neutrosophic, dan plithogenic graph, memperluas ruang representasi dan aplikasi graf planar dalam memodelkan sistem kompleks yang bersifat dinamis dan tidak pasti. fuzzy, neutrosophic, dan plithogenic graph, memberikan perluasan signifikan terhadap ruang aplikasi graf planar dan mampu meningkatkan efektivitas pemodelan sistem kompleks dibandingkan dengan pendekatan graf planar konvensional yang bersifat deterministik.

Dengan demikian, tujuan penelitian ini adalah untuk meninjau secara komprehensif perkembangan terbaru teori graf planar dari sudut pandang teoretis, algoritmik, dan aplikatif,

sekaligus menyusun peta konseptual yang dapat menjadi dasar bagi peneliti selanjutnya dalam mengembangkan kajian graf planar yang lebih terintegrasi dan relevan dengan kebutuhan ilmu pengetahuan dan teknologi di masa depan.

Dalam konteks pendidikan matematika, graf planar merupakan materi penting yang diajarkan pada mata kuliah Teori Graf, Matematika Diskrit, dan Algoritma Graf. Konsep graf planar berperan dalam mengembangkan kemampuan berpikir abstrak, penalaran spasial, serta keterampilan pemecahan masalah mahasiswa.

Perkembangan kajian graf planar yang meliputi aspek teoretis, algoritmik, dan aplikatif memiliki implikasi langsung terhadap pengayaan bahan ajar, pengembangan modul berbasis riset, serta penyusunan soal yang menuntut *Higher Order Thinking Skills* (HOTS). Peta tren penelitian graf planar yang disajikan dalam artikel ini dapat dimanfaatkan pendidik sebagai dasar dalam merancang pembelajaran berbasis penelitian (research-based learning) serta mengaitkan materi teori graf dengan aplikasi nyata di bidang teknologi dan komputasi. Dengan demikian, studi literatur ini tidak hanya berkontribusi pada pengembangan ilmu matematika, tetapi juga memberikan landasan konseptual bagi inovasi pembelajaran matematika di pendidikan tinggi.

Metodologi Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan jenis penelitian systematic qualitative literature review, yang bertujuan untuk memetakan, mengklasifikasikan, dan mensintesis secara sistematis perkembangan penelitian graf planar berdasarkan artikel-artikel terpilih. bertujuan untuk memecahkan permasalahan penelitian melalui pemetaan, analisis mendalam, dan sintesis sistematis terhadap hasil-hasil penelitian terdahulu mengenai graf planar. Pendekatan kualitatif dipilih karena karakteristik permasalahan penelitian yang menuntut pemahaman konseptual, komparatif, dan interpretatif terhadap perkembangan teori, algoritme, dan aplikasi graf planar, yang tidak dapat direpresentasikan secara memadai melalui pendekatan kuantitatif. Penelitian ini tidak berfokus pada pengujian statistik, melainkan pada penelusuran makna, pola, dan kecenderungan ilmiah yang muncul dari berbagai karya akademik yang relevan.

Lokasi penelitian tidak terikat pada wilayah geografis tertentu karena seluruh data diperoleh dari sumber pustaka digital yang dapat diakses secara daring. Subjek penelitian berupa sepuluh artikel jurnal ilmiah kunci yang membahas graf planar dan topik-topik terkait. Jumlah artikel tersebut ditetapkan secara metodologis dengan mempertimbangkan prinsip *theoretical saturation* dalam studi literatur kualitatif, yaitu kondisi ketika penambahan artikel tidak lagi menghasilkan tema atau kategori baru yang signifikan. Sepuluh artikel yang dianalisis telah mewakili masing-masing tema utama perkembangan graf planar dan berasal dari jurnal bereputasi yang terindeks Scopus dan Sinta, sehingga dinilai memadai untuk penyusunan klasifikasi tematik dan sintesis konseptual penelitian graf planar., seperti algoritme embedding, pewarnaan graf, branch-decomposition, serta pengembangan graf planar dalam kerangka fuzzy dan neutrosophic. Artikel-artikel tersebut dipublikasikan pada rentang tahun 2013 hingga 2024 dan berasal dari jurnal nasional maupun internasional yang terindeks dalam basis data Scopus dan Sinta. Pemilihan subjek penelitian dilakukan secara purposif dengan mempertimbangkan beberapa kriteria, antara lain relevansi langsung dengan fokus penelitian,

reputasi dan kualitas jurnal, kebaruan hasil penelitian, serta kontribusinya terhadap pengembangan teori, algoritme, maupun aplikasi graf planar.

Prosedur penelitian dilaksanakan melalui alur sistematis yang secara konseptual dapat direpresentasikan dalam bentuk bagan berurutan. Tahap awal penelitian diawali dengan identifikasi dan penelusuran sumber pustaka melalui basis data jurnal ilmiah menggunakan kata kunci yang berkaitan dengan graf planar, seperti *planar graph*, *graph embedding*, *planarity testing*, *graph coloring*, *branch decomposition*, *fuzzy planar graph*, dan *neutrosophic graph*. Tahap ini bertujuan untuk memperoleh himpunan awal artikel yang relevan. Selanjutnya dilakukan tahap reduksi data, yaitu proses penyaringan dan pemilahan artikel untuk menyingkirkan sumber yang tidak sesuai dengan fokus penelitian, serta mengekstraksi informasi penting dari artikel terpilih, meliputi tujuan penelitian, landasan teoretis, metode yang digunakan, dan temuan utama yang dihasilkan.

Tahap berikutnya adalah klasifikasi tematik, di mana artikel-artikel yang telah direduksi dikelompokkan ke dalam beberapa tema besar berdasarkan fokus kajiannya. Dalam penelitian ini, klasifikasi dilakukan ke dalam empat tema utama, yaitu teori dasar dan struktur graf planar, aspek algoritmik dan efisiensi komputasi graf planar, perluasan konsep graf planar ke dalam kerangka ketidakpastian melalui fuzzy dan neutrosophic graph, serta penerapan graf planar dalam bidang teknologi dan rekayasa sistem. Klasifikasi ini bertujuan untuk memudahkan analisis komparatif dan mengidentifikasi kontribusi masing-masing penelitian dalam konteks perkembangan graf planar secara keseluruhan. Tahap akhir prosedur penelitian adalah sintesis hasil, yaitu proses mengaitkan, membandingkan, dan mengintegrasikan temuan antarpenelitian untuk mengidentifikasi pola umum, kecenderungan riset, serta celah penelitian yang masih terbuka.

Instrumen penelitian yang digunakan berupa lembar analisis dokumen yang disusun secara sistematis untuk mencatat dan mengorganisasi informasi penting dari setiap artikel yang dianalisis. Lembar analisis ini memuat indikator-indikator seperti fokus penelitian, pendekatan metodologis, kontribusi teoretis, implikasi algoritmik, serta potensi aplikasi praktis dari setiap studi. Teknik analisis data dilakukan dengan menggunakan analisis isi (*content analysis*) secara kualitatif, yaitu dengan menafsirkan dan membandingkan isi artikel secara mendalam untuk memperoleh pemahaman komprehensif mengenai perkembangan graf planar dari perspektif teoretis, algoritmik, dan aplikatif. Hasil analisis selanjutnya disajikan dalam bentuk uraian naratif yang terstruktur berdasarkan klasifikasi tematik dan sintesis antarpenelitian, sehingga memungkinkan identifikasi pola, kecenderungan, dan arah perkembangan penelitian graf planar. menggambarkan hubungan antar tema dan arah perkembangan riset graf planar. Penyajian ini menjadi dasar bagi penarikan kesimpulan serta perumusan implikasi penelitian bagi pengembangan kajian graf planar di masa mendatang.

Jumlah sepuluh artikel dipilih secara metodologis dengan mempertimbangkan prinsip *theoretical saturation* dalam studi literatur kualitatif. Artikel yang dianalisis merupakan penelitian kunci (key studies) yang merepresentasikan masing-masing tema utama perkembangan graf planar dan dipublikasikan pada jurnal bereputasi dalam rentang waktu 2013–2024.

Setelah dilakukan analisis terhadap sepuluh artikel tersebut, tidak ditemukan tema baru yang secara substantif memperluas klasifikasi yang telah terbentuk, sehingga jumlah artikel

dinilai memadai untuk menyusun klasifikasi, sintesis konseptual, dan peta tren penelitian graf planar yang komprehensif.

Hasil Penelitian dan Pembahasan

A. Hasil Penelitian

Hasil penelitian ini diperoleh melalui analisis kualitatif terhadap sepuluh artikel jurnal ilmiah yang terindeks dalam basis data Scopus dan Sinta serta dipublikasikan pada periode 2013–2024. Analisis dilakukan dengan mengidentifikasi fokus kajian, metode yang digunakan, serta temuan utama dari masing-masing artikel. Melalui proses reduksi data, klasifikasi tematik, dan sintesis hasil, diperoleh gambaran komprehensif mengenai arah dan kecenderungan perkembangan penelitian graf planar dalam satu dekade terakhir. Secara umum, hasil analisis menunjukkan bahwa penelitian graf planar terkonsentrasi pada empat kelompok utama, yaitu pengembangan teori dan struktur graf planar, peningkatan efisiensi algoritme dan komputasi, perluasan konsep graf planar ke dalam domain fuzzy dan neutrosophic, serta penerapan graf planar dalam optimasi dan visualisasi sistem teknologi.

Pada kelompok pertama, yaitu aspek teori dan struktur graf planar, hasil penelitian menunjukkan adanya penguatan terhadap teori klasik serta pengembangan konsep-konsep struktural baru. Borodin (2013) mengidentifikasi dan mengklasifikasikan berbagai varian pewarnaan graf planar, seperti *acyclic coloring*, *star coloring*, dan *list coloring*, yang masing-masing memiliki batasan dan karakteristik struktural tersendiri. Dengan menggunakan pendekatan *reducible configurations* dan *discharging method*, penelitian tersebut menunjukkan bahwa struktur lokal graf planar dapat dimanfaatkan secara sistematis untuk memperluas dan memperdalam hasil-hasil klasik, termasuk Teorema Empat Warna. Selain itu, hasil penelitian Emut (2022) menunjukkan bahwa generalisasi pertidaksamaan Euler dapat digunakan sebagai alat yang efektif untuk membuktikan planaritas graf K_5 dan $K_{3,3}$ secara lebih sederhana dan konstruktif. Temuan ini memperluas pemahaman mengenai hubungan kuantitatif antara jumlah simpul, sisi, dan bidang pada graf planar, serta menunjukkan bagaimana generalisasi pertidaksamaan Euler dapat dimanfaatkan sebagai alat analitis alternatif dalam pembuktian keplanaran graf. dalam memperkaya pemahaman hubungan kuantitatif antara jumlah simpul, sisi, dan bidang, serta mempertegas peran Teorema Euler sebagai fondasi analitis graf planar.

Pada kelompok kedua, yaitu aspek algoritme dan efisiensi komputasi, hasil penelitian menunjukkan adanya peningkatan signifikan dalam kinerja dan efisiensi algoritmik. Schaefer (2021) berhasil menurunkan batas jumlah belokan (*bends*) pada embedding graf planar dengan titik simpul tetap menjadi $2.5n - 1$ per sisi, yang secara substansial lebih rendah dibandingkan batas klasik sebelumnya. Temuan ini menunjukkan bahwa representasi graf planar dapat dibuat lebih sederhana dan lebih efisien secara geometris tanpa mengorbankan keplanarannya. Selanjutnya, Bian dkk. (2016) mengembangkan algoritme *branch-decomposition* dengan kompleksitas waktu $O(n^3)$ yang mampu menghitung *branchwidth* graf planar secara optimal. Hasil ini sangat penting karena *branchwidth* merupakan parameter kunci dalam penyelesaian berbagai permasalahan NP-hard menggunakan teknik *dynamic programming*. Selain itu, penelitian ini juga menunjukkan bahwa teknik *dynamic programming* dapat efektif digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dalam graf planar.

Hoog dkk. (2022) memperkenalkan algoritme dinamis untuk *upward planar graphs* yang memungkinkan pembaruan struktur graf, seperti penambahan atau penghapusan sisi, dengan waktu pembaruan polinomial per operasi, sehingga mendukung pengelolaan graf berarah yang bersifat dinamis. memungkinkan pembaruan struktur graf, seperti penambahan atau penghapusan sisi, dengan waktu pembaruan $O(\log^2 n)$, sehingga mendukung pengelolaan graf berarah berskala besar yang bersifat dinamis.

Kelompok ketiga berkaitan dengan perluasan konsep graf planar ke dalam domain fuzzy dan neutrosophic. Hasil penelitian Fujita dan Smarandache (2024) menunjukkan bahwa konsep keplanaran dapat diadaptasi secara konsisten ke dalam graf dengan derajat keanggotaan dan ketidakpastian. Dalam pendekatan ini, simpul dan sisi tidak lagi bersifat deterministik, tetapi memiliki nilai keanggotaan yang mencerminkan tingkat kebenaran, ketidakpastian, dan kesalahan. Temuan ini menunjukkan bahwa graf planar dapat digunakan untuk merepresentasikan hubungan yang tidak pasti dan dinamis, serta memperluas ruang aplikasinya ke dalam sistem cerdas, pemodelan sosial, dan pengambilan keputusan multikriteria.

Kelompok keempat, yaitu aspek aplikasi dan optimasi graf planar, menunjukkan bahwa graf planar memiliki peran strategis dalam berbagai bidang teknologi. Di Battista dan Frati (2014) menunjukkan bahwa optimasi area pada gambar graf planar, melalui pendekatan seperti *straight-line drawing*, *orthogonal drawing*, dan *convex drawing*, berkontribusi langsung terhadap keterbacaan dan efisiensi visualisasi graf. Selain itu, hasil penelitian Wilar dkk. (2020) menunjukkan bahwa konsep *book embedding* pada graf *crossing-critical* dapat digunakan untuk membangun struktur graf yang efisien dalam konteks tata letak sirkuit. Penelitian lanjutan oleh Saroinsong dkk. (2021) memperlihatkan bahwa pengurangan *crossing number* pada keluarga graf periodik berkorelasi langsung dengan peningkatan efisiensi desain VLSI, khususnya dalam menurunkan kompleksitas jalur sirkuit dan penggunaan ruang chip.

Secara keseluruhan, hasil penelitian ini menunjukkan bahwa perkembangan graf planar bersifat multidimensional dan saling terkait antara aspek teoretis, algoritmik, dan aplikatif. Keempat kelompok temuan tersebut mencerminkan evolusi graf planar dari kajian matematis klasik menuju kerangka analitis yang lebih luas dan relevan dengan kebutuhan sistem komputasi modern.

B. Pembahasan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa perkembangan kajian graf planar tidak lagi bersifat linear atau terfokus pada satu dimensi kajian tertentu, melainkan berkembang secara multidimensi dengan keterkaitan yang erat antara aspek teoretis, algoritmik, dan aplikatif. Pergeseran ini mencerminkan dinamika kebutuhan ilmu pengetahuan dan teknologi modern yang menuntut pendekatan terpadu antara teori matematika, efisiensi komputasi, dan penerapan praktis. Dalam konteks ini, graf planar tidak hanya diposisikan sebagai objek kajian matematis abstrak, tetapi juga sebagai kerangka analitis yang relevan untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan nyata yang kompleks.

Pada aspek teoretis, temuan mengenai penguatan teori pewarnaan graf dan generalisasi Teorema Euler menunjukkan bahwa graf planar masih menyimpan potensi besar untuk pengembangan teori dasar. Penelitian Borodin (2013) memperlihatkan bahwa sifat struktural lokal graf planar memungkinkan penerapan teknik klasik seperti *discharging method* dan *reducible configurations* untuk menghasilkan hasil pewarnaan yang lebih kuat dan general.

Keberhasilan teknik ini dapat dijelaskan melalui keteraturan lokal graf planar yang membatasi munculnya konfigurasi ekstrem, sehingga memungkinkan penerapan *discharging method* dan *reducible configurations* secara sistematis. Sifat struktural ini telah dibuktikan secara luas dalam kajian pewarnaan graf planar dan teori graf struktural, khususnya pada graf dengan batasan topologis yang kuat (Borodin, 2013; Diestel, 2017). Ekstrem dan memungkinkan kontrol yang lebih ketat terhadap distribusi derajat simpul. Dibandingkan dengan graf nonplanar, graf planar memiliki kendala topologis yang secara alami membatasi kompleksitas strukturnya, sehingga lebih mudah dianalisis dan digeneralisasi secara teoretis. Generalisasi Teorema Euler yang dilakukan oleh Emut (2022) semakin memperkuat posisi graf planar sebagai objek kajian yang kaya secara struktural dan masih relevan untuk eksplorasi teoretis lanjutan.

Pada aspek algoritmik, tren penurunan kompleksitas waktu dan peningkatan efisiensi embedding graf planar menunjukkan bahwa kebutuhan praktis, khususnya dalam visualisasi graf dan desain sirkuit elektronik, menjadi pendorong utama inovasi algoritme. Perbaikan batas jumlah belokan (*bends*) pada embedding graf planar oleh Schaefer (2021) menunjukkan bahwa representasi geometris graf planar dapat dibuat lebih efisien tanpa mengorbankan keplanaran. Secara ilmiah, hal ini terjadi karena adanya integrasi antara teori graf planar, geometri komputasional, dan teknik optimasi geometris yang lebih matang. Demikian pula, algoritme dinamis yang dikembangkan oleh van der Hoog dkk. (2022) memperlihatkan bahwa pemanfaatan struktur data canggih memungkinkan pemeliharaan sifat keplanaran meskipun graf mengalami perubahan secara dinamis. Jika dibandingkan dengan penelitian graf planar klasik yang bersifat statis, pendekatan ini mencerminkan pergeseran paradigma menuju graf planar sebagai struktur data dinamis yang adaptif terhadap perubahan sistem.

Integrasi graf planar dengan kerangka fuzzy dan neutrosophic menunjukkan potensi perluasan konseptual dalam pengembangan graf planar, khususnya dalam memodelkan hubungan yang bersifat tidak pasti dan dinamis. dalam penelitian ini. Fenomena ini muncul sebagai respons langsung terhadap keterbatasan graf planar konvensional dalam memodelkan sistem yang mengandung ketidakpastian, ambiguitas, dan informasi tidak lengkap. Dalam banyak sistem nyata, hubungan antarentitas tidak selalu bersifat pasti atau biner, sehingga representasi graf klasik menjadi kurang memadai. Dengan memberikan derajat keanggotaan pada simpul dan sisi, graf fuzzy dan neutrosophic mampu menangkap nuansa ketidakpastian tersebut secara lebih realistik. Pendekatan ini sejalan dengan pandangan Smarandache (2019) yang menekankan bahwa logika neutrosophic menyediakan kerangka matematis yang lebih fleksibel untuk sistem cerdas modern. Integrasi ini juga menjelaskan mengapa graf planar fuzzy dan neutrosophic memiliki potensi besar dalam kecerdasan buatan, pemodelan sosial, dan pengambilan keputusan multikriteria, di mana ketidakpastian merupakan karakteristik inheren sistem.

Dari sisi aplikasi, hubungan antara *crossing number*, *book embedding*, dan desain VLSI menunjukkan bahwa optimasi graf planar memiliki implikasi langsung terhadap efisiensi biaya dan kinerja perangkat keras. Penurunan jumlah persilangan jalur sirkuit dapat dijelaskan secara ilmiah melalui pengurangan interferensi elektromagnetik dan pemendekan panjang jalur, yang pada akhirnya berdampak pada penurunan konsumsi energi dan peningkatan kecepatan pemrosesan. Hasil ini konsisten dengan temuan Wilar dkk. (2020) dan Saroinsong dkk. (2021) yang menunjukkan bahwa struktur graf dengan *crossing number* rendah lebih sesuai untuk

implementasi fisik pada chip mikroprosesor. Dibandingkan dengan pendekatan desain konvensional, pemodelan berbasis graf planar memberikan kerangka yang lebih sistematis dan terukur untuk optimasi tata letak sirkuit.

Secara keseluruhan, hasil dan pembahasan penelitian ini mendukung hipotesis yang diajukan, yaitu bahwa integrasi graf planar dengan kerangka ketidakpastian memberikan perluasan signifikan terhadap ruang aplikasi graf planar dan meningkatkan efektivitas pemodelan sistem kompleks dibandingkan pendekatan graf planar konvensional. Temuan ini menegaskan bahwa arah baru riset graf planar terletak pada pendekatan integratif yang menggabungkan teori klasik, algoritme efisien, dan model ketidakpastian modern. Dengan demikian, graf planar berpotensi menjadi salah satu kerangka utama dalam pengembangan model analitis dan sistem cerdas di era komputasi modern.

Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa kajian graf planar dalam satu dekade terakhir mengalami pergeseran signifikan dari pendekatan teoretis murni menuju pendekatan multidimensi yang mengintegrasikan aspek teoretis, algoritmik, dan aplikatif. Graf planar tidak lagi dipahami semata sebagai objek abstrak dalam teori graf, melainkan berkembang menjadi kerangka analitis yang relevan untuk memecahkan berbagai permasalahan kompleks dalam ilmu komputer, rekayasa sistem, dan teknologi modern. Dari sisi teoretis, graf planar masih menyimpan potensi besar melalui penguatan teori pewarnaan graf dan generalisasi teorema klasik seperti Teorema Euler, sementara dari sisi algoritmik terlihat kemajuan pada efisiensi algoritme embedding, branch-decomposition, dan algoritme dinamis yang mendukung kebutuhan praktis seperti visualisasi graf dan desain sirkuit elektronik.

Selain itu, integrasi graf planar dengan kerangka ketidakpastian seperti fuzzy, neutrosophic, dan plithogenic graph terbukti memperluas ruang aplikasi graf planar secara signifikan. Pendekatan ini memungkinkan pemodelan sistem yang dinamis dan tidak pasti secara lebih realistik, khususnya dalam konteks kecerdasan buatan dan pengambilan keputusan multikriteria, serta menunjukkan efektivitas yang lebih tinggi dibandingkan pendekatan graf planar konvensional dalam memodelkan sistem kompleks. Secara keseluruhan, penelitian ini menegaskan bahwa masa depan riset graf planar terletak pada pendekatan integratif yang mengombinasikan teori klasik, inovasi algoritmik, dan kerangka ketidakpastian modern sebagai landasan pengembangan kajian graf planar yang lebih komprehensif dan aplikatif.

Daftar Pustaka

- Bian, Z., Gu, Q. P., & Zhu, M. (2016). Practical algorithms for branch-decompositions of planar graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 199, 156–171. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.10.008>
- Borodin, O. V. (2013). Colorings of plane graphs: A survey. *Discrete Mathematics*, 313(4), 517–539. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.11.017>
- Di Battista, G., & Frati, F. (2014). A survey on small-area planar graph drawing. *arXiv Preprint arXiv:1410.1006*. <https://arxiv.org/abs/1410.1006>
- Diestel, R. (2017). *Graph theory* (5th ed.). Berlin, Germany: Springer.

- Emut, E. (2022). Generalisasi pertidaksamaan Euler untuk membuktikan planaritas graf K_5 dan $K_{3,3}$. *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 17(2), 475–488. <https://doi.org/10.21831/pg.v17i2.XXXX>
- Fujita, T., & Smarandache, F. (2024). Survey of planar and outerplanar graphs in fuzzy and neutrosophic graphs. *University of New Mexico Repository*. <https://digitalrepository.unm.edu/xxxx>
- Guégan, G., Knauer, K., Rollin, J., & Ueckerdt, T. (2021). The interval number of a planar graph is at most three. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 146, 61–67. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2020.10.005>
- Hopcroft, J., & Tarjan, R. (1974). Efficient planarity testing. *Journal of the ACM*, 21(4), 549–568. <https://doi.org/10.1145/321850.321852>
- Hoog, I. van der, Parada, I., & Rotenberg, E. (2022). Dynamic embeddings of dynamic single-source upward planar graphs. *arXiv Preprint arXiv:2209.14094*. <https://arxiv.org/abs/2209.14094>
- Istiani, A., & Hidayatulloh. (2017). Analisis kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal pada materi bangun ruang sisi datar. Dalam *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika* (Vol. 1, No. 1, hlm. 129–135). Lampung, Indonesia.
- Kuratowski, K. (1930). Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae*, 15, 271–283.
- Nugroho, R. A. (2018). *Higher-order thinking skills (HOTS)*. Jakarta, Indonesia: Grasindo.
- Pach, J., & Wenger, R. (2001). Embedding planar graphs at fixed vertex locations. *Graph Drawing, Lecture Notes in Computer Science*, 1984, 263–274. https://doi.org/10.1007/3-540-44541-2_25.
- Saroinsong, A. G. T., Pinontoan, B., & Montolalu, C. E. J. C. (2021). Crossing number of infinite family of extension Kochol's periodic graphs. *Jurnal DeCartesiaN*, 10(2), 123–134. <https://jurnal.unsat.ac.id/index.php/decartesian>
- Satriani, S., Uddin, W., Halim, N. H., & Syamsuadi, A. (2020). The analysis of compliance type student's error in resolving integral challenge of trigonometry function. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 66(10), 14–19. <https://doi.org/10.14445/22315373/IJMTT66I10P503>
- Schaefer, M. (2021). A new algorithm for embedding plane graphs at fixed vertex locations. *Electronic Journal of Combinatorics*, 28(4), P4.55. <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/XXXX>
- Smarandache, F. (2019). *Introduction to neutrosophic graph theory*. Brussels, Belgium: Pons Publishing House.
- Tamassia, R. (2013). *Handbook of graph drawing and visualization*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- Wilar, S. H., Pinontoan, B., & Montolalu, C. E. J. C. (2020). Book embedding of infinite family crossing-critical graphs. *Jurnal DeCartesiaN*, 9(1), 45–55. <https://jurnal.unsat.ac.id/index.php/decartesian>
- West, D. B. (2018). *Introduction to graph theory* (2nd ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.