BATAS BAWAH BILANGAN RAMSEY PADA GRAF BINTANG S_{10} VERSUS RODA W_{12} LOWER BOUND OF THE RAMSEY NUMBER FOR THE STAR GRAPH S_{10} VERSUS WHEELS W_{12}

Hamdana Hadaming, Andi Ardhila Wahyudi
Pendidikan Guru Sekolah Dasar Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Muhammadiyah Makassar
andiardhila@gmail.com

ABSTRAK

Bilangan Ramsey untuk graf G terhadap graf H, dinotasikan dengan $R(G,H)$ adalah bilangan bulat terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap graf F dengan orde n akan memenuhi sifat berikut: F memuat graf G atau komplemen dari F memuat graf H. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan graf kritis maksimum S_{10} dan W_{12} dengan n genap. Berdasarkan batas bawah tersebut di tentukan batas atas minimum sehingga diperoleh nilai bilangan Ramsey untuk graf bintang S_{10} versus W_{12}, atau $R(S_{10,}W_{12})$. Dengan demikian penentuan batas bawah bilangan Ramsey $R(S_{10,}W_{12})$ dilakukan dengan cara batas bawah yang diberikan oleh Chavatal dan Harary, untuk bilangan Ramsey pada graf bintang S_{10} versus W_{12} adalah $R(S_{10},W_{12}) \geq (\chi(W_{12})-1)(C(S_8)-1)+1=19$, dengan $\chi(W_{12})$ adalah bilangan kromatik titik graf roda W_{12} dan $C(S_{10})$ adalah kardinalitas komponen terbesar graf S_{10}. Berdasarkan batas bawah Chavatal dan Harary tersebut dikonstruksi graf kritis untuk S_{10} dan W_{12} yang ordenya lebih besar dari nilai batas bawah yang diberikan Chavatal dan Harary. Orde dari graf kritis tersebut merupakan batas bawah terbaik untuk $R(S_{10,}W_{12})$.

Kata kunci: Bilangan Ramsey, bintang, roda

Abstract

Ramsey Numbers for a graph G to a graph H, denoted by $R(G,H)$ is the smallest integer n such that for every graph F of order n either the following meeet: F contains a graph G or the complement of F contains the graph H. This aims of the study to determine the maximum critical graph S_{10} and W_{12}. Based on the lower bound of the specified minimum upper bound in order to obtain numerical values for the Ramsey graph S_{10} Star versus W_{12}, or $R(S_{10,}W_{12})$. Thus the determination of Ramsey numbers $R(S_{10,}W_{12})$. is done by determine the lower boundary and upper bound. The lower bound given by Chavatal and Harary, for ramsey number for star S_{10} graph versus wheel W_{12} is $R(S_{10},W_{12}) \geq (\chi(W_{12})-1)(C(S_8)-1)+1=19$, is a point graph of chromatic number wheel (W_{12}) and $C(S_{10})$ is the cardinality of the largest component of the graph S_{10}. Based on the lower bound Chavatal and Harary graph is constructed critical to S_{10} and W_{12} are poin greater than the lower bound value given Chavatal and Harary. Order of the critical graph is the best lower bound for $R(S_{10,}W_{12})$.

Keywords : Ramsey number, Stars, and Wheels

PENDAHULUAN

Teori Ramsey dalam konsep graf dengan objek graf lengkap dapat dituliskan sebagai berikut: untuk setiap bilangan asli n, terdapat bilangan asli $R(n)$ sedemikian sehingga, jika sisi-sisi dari graf lengkap dengan m titik, $m \geq R(n)$ diwarnai dengan warna merah atau biru akan selalu memuat subgraf sewarna yang isomorph dengan K_n sebagai subgraf. Bilangan $R(n)$ disebut bilangan Ramsey Klasik.

Jika graf pada teorema tersebut bukan hanya graf lengkap tetapi berlaku untuk sebarang graf, maka teorema tersebut disebut teorema Ramsey graf. Graf yang dimaksud di sini adalah graf sederhana dan berhingga.

Misalkan G adalah graf. Graf F disebut komplemen dari G jika setiap pasang titik yang dikaitkan oleh satu sisi di F jika hanya jika pasangan-pasangan titik tersebut tidak dikaitkan oleh suatu sisi di G. Berdasarkan konsep komplemen, pengertian bilangan Ramsey graf dua warna dapat ditulis sebagai berikut: Diberikan dua graf G dan H. Bilangan Ramsey graf G dan H didefinisikan sebagai bilangan bulat terkecil n sedemikian sehingga setiap graf F dengan n titik akan memuat G atau komplemen dari F memuat H. Bilangan Ramsey graf G dan H dinotasikan dengan $R(G, H)$. Batas bawah bilangan Ramsey $R(G, H)$ diberikan oleh Chavatal dan Harary (1972), yaitu $R(G, H) \geq (\chi(H) - 1)(C(G) - 1) + 1$, dimana $\chi(H)$ adalah bilangan kromatik graf H dan $C(G)$ melambangkan banyaknya titik pada komponen terbesar dalam graf G.

Kajian bilangan Ramsey untuk bintang dan roda telah dilakukan oleh beberapa peneliti. Berikut beberapa peneliti yang telah mengkaji bilangan Ramsey, khususnya graf bintang dan roda antara lain.

Chen dkk (2004), mengkaji $R(S_n, W_6) = 2n + 1$ untuk $n \geq 3$ dalam makalah yang sama mereka, membuktikan bahwa $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk m ganjil dan $n \geq m - 1 \geq 2$.

Di tahun yang sama Zhang (2004), mengkaji bilangan Ramsey $R(S_n, W_8) = 2n + 1$ untuk n ganjil dan $R(S_n, W_8) = 2n + 2$ untuk n genap.

Pada tahun berikutnya Korolova (2005), mengkaji bilangan Ramsey $R(S_n, W_4) = 3n - 2$ jika $n = m, m + 1$ atau $m + 2$.

Selain itu Hasmawati (2007), membuktikan $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk m ganjil, dan $3 \leq m \leq 2n - 1$ dan $R(S_n, W_m)$ untuk n ganjil dan m genap dan $m = 2n - 2, 2n - 4, 2n - 6$ atau $2n - 8$.

Hasil terbaru diberikan oleh Ahsan (2010), yaitu $2n + 1 \leq R\left(S_{n,} W_8\right) \leq \frac{5(n-1)}{2}$ untuk $n \geq 11$, $n \equiv 3 \pmod 4$., di tahun yang sama Korani (2010), mengkaji bilangan Ramsey untuk graf gabungan saling lepas bintang terhadap roda orde tujuh, hasilnya adalah $R(kS_n, W_6) = (k + 1)n + 1$ untuk $n \geq 4$ dan $k \in N$ dan jika $n_i \geq n_{i+1}$ untuk $i = 1,2, \dots ,$ $k - 1$ dan $2n_k > n_{k-1}$, maka $R\left(\cup_{i=1}^{k} S_{ni}, W_6\right) = R(S_{nk}, W_6) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$, untuk $n_i \geq 4$ untuk setiap i.

Hasil studi literatur menunjukkan bahwa bilangan Ramsey untuk bintang berorde genap terhadap roda berorde ganjil belum banyak ditemukan. Dalam jurnal ini dikaji penentuan bilangan Ramsey untuk bintang berorde genap tertentu terhadap roda berorde ganjil tertentu. Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu menentukan bilangan Ramsey untuk graf bintang S_{2n} terhadap roda W_{2n+2} untuk n sembarang.

METODE PENELITIAN

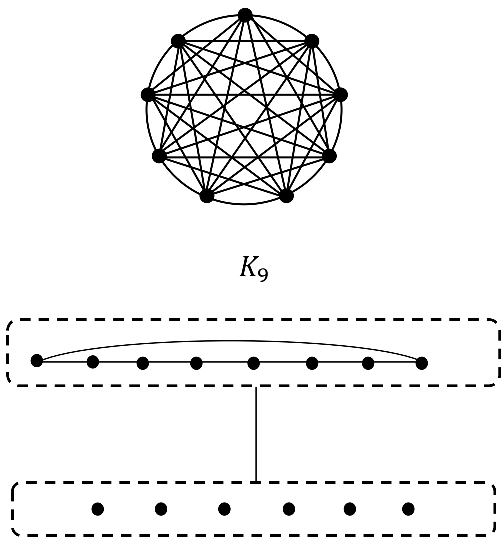
Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode studi literatur, dengan menggunakan data eksperimental.

HASIL PENELITIAN

Batas bawah untuk bilangan Ramsey pada graf bintang dengan orde 10 terhadap graf roda dengan orde 13 atau $R\left(S_{10,} W_{12}\right)$ di peroleh $R\left(S_{10,} W_{12}\right) \geq 24$.

Bukti :

Dalam penelitian ini diperoleh batas bawah yang lebih besar dari batas bawah yang diberikan oleh Chavatal Harary yaitu $R\left(S_{10,} W_{12}\right) \geq 24$. Berikut bukti memperoleh bahwa 24 adalah yang terbesar. Pilih graf dengan orde 23 sebut F_{23} yaitu $F_{23} = K_9 \cup T$, dimana $T = C_8 + \overline{K}_6$ dan $|T| = 14$. Yang strukturnya pada (Gambar 1).

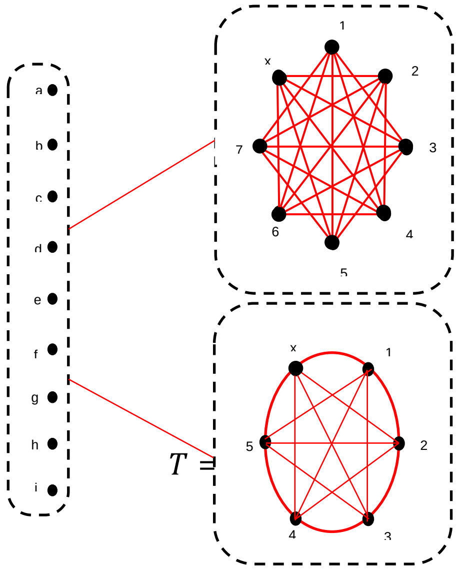


K_9

$T = C_8 + \bar{K}_6$

Gambar. 1

Graf $F_{23} = K_9 \cup T$ tidak memuat S_{10} karena setiap titik x di F_{23}, $d(x) = 8$. Sedangkan pada S_{10}, terdapat satu titik sebut u dengan $d(u) = 9$. Komplemen dari F_{23} yaitu $\bar{F}_{23} = \bar{K}_9 + \bar{T}$ pada (Gambar 2). Setiap titik x di $\bar{T}$, $d_{\bar{T}}(x) = 5$ dan bertetangga dengan setiap titik di $\bar{K}_9$. Berarti setiap titik x di $\bar{T}$, $d_{\bar{F}}(x) = 14$. Karena setiap titik x di $\bar{T}$, $d_{\bar{T}}(x) = 5$, maka setiap titik x di $\bar{T}$ bertetangga dengan hanya 5 titik lain di $\bar{T}$. Akibatnya, untuk membentuk siklus di $\bar{F}_{23}$, kita hanya mengambil paling banyak 5 titik di $\bar{K}_9$. Jadi siklus yang dapat dibentuk di $\bar{F}_{23}$ adalah C_{10} yaitu salah satunya $2, a, 3, b, 4, c, 5, d, 6, e, 2$. Siklus C_{10} bersama-sama dengan titik x membentuk roda W_{10} di $\bar{F}_{23}$, dan W_{10} adalah yang terbesar. Berarti $\bar{F}_{23}$ tidak memuat W_{12}.



$\bar{K}_9$

$\bar{T} = \bar{C}_8 \cup K_6$

Gambar.2

Jadi $F_{23} \not\supseteq S_{10}$ dan $\bar{F}_{23} \not\supseteq W_{12}$. Karenanya F_{23} juga merupakan graf kritis untuk S_{10} dan W_{12}. Jadi $R(S_{10}, W_{12}) > 24$ atau $R(S_{10}, W_{12}) \geq |F_{23}| + 1 = 24$. Jadi diperoleh $R(S_{10}, W_{12}) \geq 24$.

PEMBAHASAN

Penelitian ini menentukan batas bawah bilangan Ramsey untuk graf bintang berorde genap terhadap roda berorde ganjil yaitu $R(S_{10}, W_{12})$. Penentuan batas bawah berdasarkan batas bawah Chavatal dan Harary. Batas bawah yang diberikan oleh Chavatal dan Harary, untuk graf bintang S_{10} *versus* roda W_{12} adalah $R(S_{10}, W_{12}) \geq (3-1)(10-1)+1 = 19$, dengan $\chi(W_{12})$ adalah bilangan kromatik titik graf roda W_{12} dan $c(S_{10})$ adalah kardinalitas komponen terbesar graf S_{10}. Berdasarkan batas bawah Chavatal dan Harary tersebut dikontruksi graf kritis untuk S_{10} dan W_{12} yang ordenya lebih besar dari nilai batas bawah yang diberikan Chavatal dan harary yakni 24 untuk $n \geq 4$. Orde dari graf kritis tersebut merupakan batas bawah yang lebih baik dari yang diberikan Chavatal dan Harary.

KESIMPULAN DAN SARAN

Batas bawah yang diperoleh untuk bilangan Ramsey graf bintang orde genap terhadap graf roda dengan orde ganjil dan lebih besar dari orde bintang yakni selisih tiga, lebih besar dari batas bawah yang diberikan oleh Chavatal-Harary. Adapun saran yang diberikan yaitu bagi peneliti yang ingin melakukan penelitian terkait dengan masalah bilangan Ramsey yang memuat bintang dan roda dapat melanjutkan penelitian dengan orde yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Ahsan. (2010). Bilangan Ramsey untuk Graf Bintang Terhadap Roda Berorde Sembilan. (Tesis). Makassar: Universitas Hasanuddin.

Chavatal, V., dan Harary, F. (1972). Generalized Ramsey theory for graphs, III, small off-diagonal numbers, *Pac. J. Math.*, 41, 335 - 345.

Chen, Y. J., Zhang, Y .Q., dan Zhang, K. M. (2004). The Ramsey numbers of stars versus wheels, *European J. Combin.*, 25, 1067 - 1075.

Hasmawati. (2007). Bilangan Ramsey untuk Graf Gabungan Bintang. (Disertasi): *Departemen Matematika ITB*.

Korolova, A. (2005). Ramsey numbers of stars versus wheels of similar sizes, *Discrete Math.*, 292, 107 - 117.

Zhang, Y. Q., dan Zhang, K. M. (2004). On Ramsey numbers $R(Sn;W8)$ forsmall *n*, *Department of Mathematics, Nanjing University*, China. Preprint.